

SECCION OFICIAL
DE LA
SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
SECCION "SANTA FE"

Asamblea del 16 de Abril de 1937

Disertaciones de los Dres. HORACIO DAMIANOVICH y GUSTAVO FESTER

En uno de los salones del Centro Español de la ciudad de Santa Fé y bajo la presidencia del Ing. Francisco E. Urondo se inició a las 18 del 16 de Abril de 1937 la Asamblea anual de la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fé), en la que se leyó y aprobó la memoria de la presidencia y balances de Tesorería correspondientes al período 1936-1937, procediéndose luego a la elección de las autoridades de la Sección para el período 1937-1938.

A continuación el Dr. Damianovich disertó sobre el tema:

La química del helio y elementos análogos, exponiendo los resultados de las investigaciones propias y de sus colaboradores, que desde hace varios años prosigue en el Instituto de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Facultad de Química y que fueron objeto últimamente de varias comunicaciones y conferencias en diversos institutos científicos de Francia.

Por último el Dr. Gustavo Fester disertó sobre el tema:

Viaje a la zona magallánica, exponiendo datos y detalles relacionados con una expedición efectuada a las tierras australes durante las últimas vacaciones y cuyos resultados científicos serán objeto de una publicación próxima.

Ambas disertaciones fueron ilustradas con cuadros, gráficos y proyecciones luminosas, siendo muy aplaudidas por el numeroso público asistente, formado por socios y miembros de sus familias, invitados especialmente al acto.

**Informe de la Presidencia leído en Asamblea Ordinaria
de fecha Abril de 1937**

Estimados consocios:

Al terminar nuestro mandato cumplimos en informar a la Asamblea sobre las actividades desarrolladas en el período que fenece.

COMUNICACIONES CIENTÍFICAS

Con motivo de cumplirse el 25º aniversario del fallecimiento del sabio argentino Florentino Ameghino, se realizó una sesión de comunicaciones científicas el 7 de Agosto de 1936, pronunciando palabras alusivas al homenaje el profesor don Rolando Hereñú. Luego se consideraron los siguientes trabajos:

Crouzeilles Amelia L. de. — Datos arqueológicos sobre paraderos indígenas de Santa Fe (Isla del Periquillo, Helvecia y Sauce Viejo).

Frenguelli Joaquín. — Apuntes estratigráficos acerca del yacimiento del « *Glossotherium* » de la laguna Guadalupe.

Fertes G., Bertuzzi F. y Pucci D. — La identidad del yacarol con el d-citronelol.

Damianovich Horacio. — La Química del helio y trasmutación de los elementos.

El 13 de Noviembre último se efectuó otra sesión, comunicándose los siguientes trabajos:

Carabajal Raúl S. J. — Últimos descubrimientos arqueológicos de Arroyo Leyes.

Fester G. — La cordillera fueguina.

Babini J. — Sobre la sumación de algunas series divergentes.

Urondo F. E. — Nuevas medidas de radioactividad del aire del subsuelo.

Por la circunstancia de haberse realizado en esta ciudad en el mes de Julio las Sesiones Químicas Argentinas organizadas por la Asociación Química Argentina, no se realizaron sesiones de comunicaciones durante el primer semestre del año, debido a que algunos de nuestros consocios presentaron trabajos en ese certamen.

En la sesión de hoy disertarán:

Damianovich H. — La química del helio y elementos análogos.

Fester G. — Viaje a la zona magallánica.

CONFERENCIAS

En el salón de actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de esta ciudad y ante numeroso y atento auditorio se pronunciaron las siguientes conferencias:

Por el Ing. Agrónomo Antonio E. Marino, del Departamento de Agronomía del Instituto Experimental y de Investigaciones Agrícolas de la provincia de Santa Fe, el 23 de Julio de 1936 sobre el tema: « Herencia Mendeliana ».

El 8 de Agosto disertó el Rev. P. José A. Laburu S. J. sobre el tema: « Problemas sobre la psicofisiología del carácter ».

El 18 de Agosto el contador público Emilio Sánchez R. sobre el tema: « Primera crisis mundial de post-guerra y su repercusión en la provincia de Santa Fe ».

El Dr. Mariano Tissembaum el 10 de Setiembre disertó sobre el tema: « El trabajo. Función jurídica, social y educativa ».

El Dr. Franz Kühn, Profesor de la Universidad de Kiel, el 10 de Octubre, desarrolló el tema: « Bases científicas de la Geografía Económica aplicadas a la Argentina ».

Todas estas conferencias fueron auspiciadas por el Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral y algunas de ellas transmitidas radiotelefónicamente.

BIBLIOTECA

La biblioteca social ha ido aumentando en forma paulatina sus existencias. Se han incorporado diversas revistas periódicas argentinas y extranjeras cuya nómina se detalla por separado en copias mimeográficas para ser agregadas a la « Nómina de publicaciones existentes en la biblioteca de la Sociedad Científica Argentina, Sección Santa Fe », edición Santa Fe 1935, folleto impreso que fuera distribuído oportunamente a los señores socios.

Entre las publicaciones incorporadas destacamos « La civilización Chaco-Santiagueña », Emilio R. y Duncan L. Wagner, que fué obsequiada a nuestra Institución por el Superior Gobierno de la Provincia, lo que fué debidamente agradecido. Asimismo observarán los señores socios que en la nómina anterior figuran « Comptes rendues hebdomadaire des seances de l'Académie des Sciences », T. 202 y 203, año 1936 completo, cuya subscripción fué abonada con nuestros fondos. Asimismo se ha girado el importe de la subscripción por el año en curso. La incorporación de tan importante publicación esperamos será bien recibida por nuestros consocios.

ANALES Y CANJE

Los resúmenes de las comunicaciones científicas fueron publicados en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina* que envió a esta Sección Santa Fe, 150 ejemplares cada vez de tirajes aparte de aquellos trabajos, habiéndose completado el tomo 8 de los Anales de esta Sección.

Con esos tirajes hemos continuado el canje de revistas ofreciendo los números anteriores y recibiendo contestaciones en forma tal que se han podido seleccionar las instituciones con quienes mantenemos canje. Ese número se eleva a 44 y debe mantenerse tratando de elevarlo no descuidando la correspondencia pertinente. Esta tarea fué cumplida con entusiasmo y eficiencia por nuestro Secretario Ing. Químico Rodolfo Rouzaut lo que deseamos resaltar por la circunstancia que nuestra Sociedad no dispone de personal remunerado.

En la corrección de pruebas y en todo lo referente a los Anales nuestro consocio el Ing. José Babini ha tenido la destacada actuación de siempre.

EXCURSIONES

El 17 de Abril se realizó una excursión a la fábrica de productos cerámicos Alassio Hnos. situada en La Guardia cerca de esta ciudad. En esa oportunidad recordarán quienes asistieron las múltiples atenciones que nos fueron dispensadas por los propietarios. También deseamos señalar que participaron invitados por nuestra Sociedad un grupo de estudiantes de la Facultad de Química Industrial y Agrícola y de la Especialidad Química de la Escuela Industrial.

El 8 de Agosto por la tarde el Director del Instituto del Museo de la Universidad Nacional de La Plata, nuestro consocio honorario Dr. Joaquín Frenguelli, dictó una conferencia al pie de las barrancas del Paraná y con ese motivo nuestra Sociedad invitó a trasladarse a aquella ciudad a nuestros asociados, los que lo hicieron en cantidad.

HOMENAJES

Además del acto realizado como homenaje recordatorio del 25 aniversario de la muerte de don Florentino Ameghino a que ya nos hemos referido, se realizó otro acto conmemorando el centenario del fallecimiento del sabio francés Andrés M. Ampère consistente en una disertación radiotelefónica por la estación radioemisora del Instituto Social de la Universidad Nacional del Litoral a cargo del Presidente, que se refirió a la personalidad de aquel eminente investigador.

COMISIÓN DIRECTIVA

En las sesiones realizadas por la Comisión Directiva que hoy termina su mandato se han considerado diversos asuntos. Han sido facilitados en préstamo al Instituto del Museo de La Plata algunas piezas óseas a pedido del Dr. Joaquín Frenguelli. Se ha aceptado la donación de una linterna de proyección casi completa de parte del Dr. J. Frenguelli, lo que ha sido debidamente agradecido.

La Tesorería ha sido atendida con la diligencia de siempre por nuestro consocio Ing. Carlos Christen. Podrán apreciar por el adjunto balance que nuestra Institución que sólo cuenta con el aporte de las cuotas mensuales de los asociados ha cumplido todos sus compromisos y mantiene el superávit. El total de entradas suma un total de

\$ 1.406.98 y el total de gastos la suma de \$ 1.364.25, no existiendo cuentas a pagar. En el monto de gastos están incluídos la cantidad de \$ 961.50 depositados a la orden de la Sociedad Científica Argentina Central y \$ 114.40 por subscripción a revistas extranjeras. Pasan al ejercicio siguiente 182 recibos al cobro que importan \$ 364.— y \$ 42,73 en efectivo.

SOCIOS

En la actualidad contamos con 56 socios activos y un socio honorario.

* * *

Nuestras relaciones con la Comisión Directiva Central, se han desarrollado evidenciando una amplia colaboración y así también ha ocurrido en los componentes de la Comisión Directiva de esta Sección, con lo que la tarea se ha hecho fácil y grata.

Queda a vuestra consideración esta labor.

R. ROUZAUT
Secretario

F. E. URONDO
Presidente

COMISIÓN DIRECTIVA
Período 1937-1938

<i>Presidente</i>	Dr. GUSTAVO A. FESTER
<i>Vice-Presidente</i>	Dr. JOSÉ PIAZZA
<i>Secretario de actas</i>	Ing. Quím. JOSÉ CRUELLAS
<i>Secretario de correspondencia</i>	Ing. Quím. FRANCISCO A. BERTUZZI
<i>Tesorero</i>	Ing. Quím. ENRIQUE VIRASORO
<i>Vocal titular I</i>	Ing. JOSÉ BABINI
<i>Vocal titular II</i>	Prof. ROLANDO HEREÑÚ
<i>Vocal suplente I</i>	Prof. JULIO SALABER
<i>Vocal suplente II</i>	Ing. Quím. GUILLERMO BERRAZ
<i>Encargado de publicaciones</i>	Ing. JOSÉ BABINI
<i>Encargado de Biblioteca y Canje</i> .	Ing. Quím. RODOLFO ROUZAUT

SOCIOS ACTIVOS

Anadón, Leónidas	Juliá Tolrá, Antonio
Argüelles, Eugenio	Kleer, Gregorio
Ariotti, Juan Carlos	Mai, Carlos
Babini, José	Mántaras, Fernando
Berraz, Guillermo	Marelli, Hipólito
Bertuzzi, Francisco	Marino, Antonio E.
Bonazzola, César J.	Montpellier, Luis Marcos
Borruat, Luis	Morisot, Augusto
Borruat, Luis (hijo)	Mounier, Celestino
Borzone, Rodolfo	Muzzio, Enrique
Bossi, Celestino	Nigro, Angel
Caballero, Martín A.	Niklison, Carlos A.
Camo, José María	Oliva, José
Cerana, Miguel	Peresutti, Luis
Claus, Guillermo	Piazza, José
Courault, Pablo	Piñero, Rodolfo
Crouzelles, A. L. de	Pozzo, Hiram J.
CrueLLas, José	Ragonese, Antonio E.
Christen, Carlos	Reinares, Sergio
Christen, Rodolfo G.	Rouzaut, Rodolfo
Damianovich, Horacio	Salaber, Julio
Falco, Federico	Salgado, José
Fester, Gustavo A.	Santini, Bruno L. P.
Frenguelli, Joaquín	Schivazappa, Mario
Gollan, Josué (h.)	Simonutti, Atilio A.
Gschwind, Eduardo P.	Tissembaum, Mariano
Guinle, Hugo José	Urondo, Francisco E.
Hereñú, Rolando	Virasoro, Enrique
Hotschever, Curto	

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA "SEC. SANTA FE"

Cuenta de Recursos y Gastos (Abril 1936 - Abril 1937)

DEBE

HABER

Saldo del ejercicio anterior \$	158.98	Invertido en concepto de:		
Importe de 62 recibos percibidos durante el mes de Abril »	124.00	Comisión al cobrador por la cobranza de 624 recibos, a \$ 0.30 por c/u. \$		187.20
Importe de 58 recibos percibidos durante el mes de Mayo »	116.00	Impresión de tarjetas y circulares »		73.50
Importe de 54 recibos percibidos durante el mes de Junio »	108.00	Libretas de cheques »		1.25
Importe de 70 recibos percibidos durante el mes de Julio »	140.00	Depósitos en cuenta corriente, a la orden de la Sociedad Científica (Bs. Aires):		
Importe de 59 recibos cobrados durante el mes de Agosto »	118.00	1er. Trimestre »		270.00
Importe de 50 recibos cobrados durante el mes de Setiembre »	100.00	2º Trimestre »		274.50
Importe de 58 recibos percibidos durante el mes de Octubre »	116.00	3er. Trimestre »		246.00
Importe de 56 recibos percibidos durante el mes de Noviembre »	112.00	4º Trimestre »		171.00
Importe de 52 recibos percibidos durante el mes de Diciembre »	104.00	Suscripción a dos años de « Comptes Rendus de l'Académie de Sciences », París »		114.40
Importe de 62 recibos percibidos durante los meses de Enero y Febrero »	124.00	Gastos varios »		26.40
Importe de 43 recibos percibidos durante el mes de Marzo »	86.00	Recibos al cobro, que pasan al ejercicio siguiente, 182 a \$ 2.00 c/u. »		364.00
Recibos al cobro, que pasan al ejercicio siguiente, 182 a \$ 2.00 c/u. »	364.00	Efectivo en Tesorería »		42.73
	1.770.98			1.770.98

C. CHRISTEN
TesoreroF. E. URONDO
Presidente

LA CHACRA EXPERIMENTAL DE PATAGONES (*)

IMPRESIONES DE UN OBSERVADOR

POR EL INGENIERO CARLOS WAUTERS

(Conclusión)

VI

CONCEPTO DE LA ENSEÑANZA POR LA CHACRA

Dentro de esta síntesis se descubre un mundo de investigaciones a realizar, con finalidades prácticas de carácter económico, para dar, de una vez por todas, a los problemas relacionados con nuestra producción las bases científicas de que carecen. Por desgracia, las autoridades que de alguna manera han intervenido en la suerte de la chacra experimental de Patagones no lo han entendido así, en ningún momento. Vista de lejos y desde un avión, como en la fotografía adjunta, ofrece una agradable perspectiva de contraste con el desierto circunvecino.

En pleno período de experimentación inicial o, mejor dicho, antes de transcurridos los primeros seis meses de empezados los trabajos preliminares de instalación, en nota n° 179 de julio de 1907, la intendencia municipal se apresuraba a pedir al gobierno que, una vez terminados los estudios que la habían justificado, las máquinas, bombas e instalaciones fueran cedidas para destinarlas « al servicio de aguas corrientes y de una usina que suministre la corriente eléctrica necesaria para el alumbrado del pueblo ».

Con todo acierto, el gobierno aceptó nuestra opinión y no atendió el pedido. Resolvió, en cambio, dar carácter permanente a la chacra; y sin perder tiempo tramitó la cesión del terreno ocupado y cedido por el Concejo Deliberante en las sesiones del 2 y 5 de octubre de 1910. La escrituración no pudo realizarse hasta que, en 21 de agosto de

(*) Ver Tomo CXXIII, Entrega VI, pág. 273 y sig.

1916, la Legislatura de la provincia autorizó a la municipalidad para formalizar la transferencia. En su sesión del 2 de febrero de 1917 el Concejo dispuso la escrituración, sin las calles que el P. E. podrá mantener cerradas hasta tanto la municipalidad « considere necesaria la apertura de alguna de ellas cuando el tráfico lo haga indispensable ». La mensura previa redujo el área entregada en la primera hora a 127 Ha. 93 a. 88 ca.

La escritura no pudo extenderse sino en 13 de abril de 1923, una vez que el gobierno aceptó la condición impuesta por la munici-

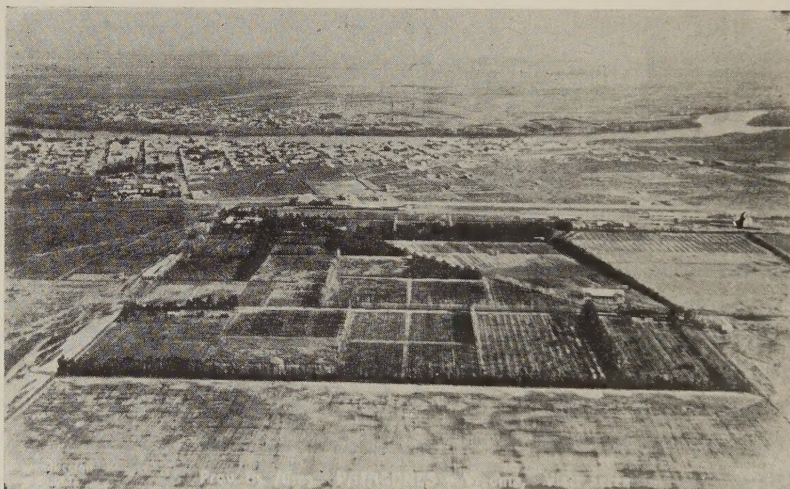


FIG. 6.

palidad de crear una « Escuela de agricultura » en la referida chacra, para satisfacer una aspiración que se había arraigado en el vecindario y procuraba crearle un ambiente favorable. En efecto, en 1921, en un gran diario de esta capital se escribía que los cultivos frutales no habían dado mayores resultados « por los métodos empíricos usados », a pesar de haber sido realizados por agrónomos profesionales. Por ello se reclamaba la fundación de una modesta escuela frutícola, transformada en « Escuela de agricultura » durante la larga tramitación. Se agregaba: « El personal dirigente de la chacra es más que suficiente para cumplir esta misión y lo haría gustoso, *pues hoy se aburre* ». El estudio que cura este mal, hubiera permitido mostrar a los futuros maestros la forma de hacer cultivos menos empíricos, de no hacerlos sino en terrenos pre-

viamente preparados, y poner la chacra en condiciones de ofrecer enseñanzas prácticas de lo que debe hacerse para obtener rendimientos satisfactorios, y no limitarse a señalar fracasos que despiertan el pesimismo en el que entra a una escuela para ilustrarse y rehuirlos. De inmediato, por decreto del 3 de julio de 1923, fué nombrado un profesor sin especificar la materia que enseñaría.

Con apremio, por decreto del 30 de abril de 1924, fué aprobado el plan de estudios y el reglamento para la escuela. El edificio se empezó a construir ese año y se ha terminado recién hace poco, con un gasto de más de 400 000 pesos. No se ha habilitado hasta la fecha, no obstante haberse agregado, desde tiempo atrás, un profesor más, ninguno de ellos con residencia en Patagones donde no hay ni puede haber alumnos en la escuela.

Cuando más falta hace implantar una nueva orientación experimental, el P. E. en acuerdo de ministros n° 118 del 29 de abril de 1932, resuelve distraer el personal de la chacra en tareas totalmente ajenas a su carácter técnico; y dispone que «la dirección de la chacra y escuela experimental de Patagones atienda directamente y sobre el terreno las gestiones relacionadas con este asunto», es decir, que se ocupe «del plan de administración de las tierras». Obsérvese que la *escuela de agricultura*, creada en 1923, se hace ahora *experimental*, antes de introducir las correcciones necesarias en la labor de la chacra que lo era y que, en todo caso, no es obra de alumnos que no aparecen y cuya preparación, a juzgar por el plan de estudios que los espera todavía, impedirá toda investigación seria.

Nada más inexacto, por otra parte, que afirmar, como se hace para justificar tan errónea resolución, que la chacra fué fundada «para que, cuando alguna vez, se hiciera la irrigación, pudiera vigilar su mejor aprovechamiento y al mismo tiempo la percepción mejor de la renta». Hubiera sido insensato insinuar siquiera cualquiera de esos dos propósitos: la función de la chacra ha debido ser siempre la misma, misión pura y exclusivamente experimental, con la que hay cómo *divertir* al personal con tareas absorbentes, si los jefes se compenetran del alcance preciso de su cometido. Estas, en cambio, son tareas que pertenecen a las autoridades de aguas, sobre cuya existencia y funcionamiento no existe la más mínima noción en las esferas oficiales y administrativas de la provincia.

La chacra, estación o campo de experimentación, no puede ni debe ser escuela de agricultura ni de alguna de sus especializaciones.

A ella no deben ingresar aves de paso, en busca de una posición transitoria, simple eslabón dentro de un escalafón burocrático administrativo. Sus dirigentes deben ser hombres avezados en las tareas de la investigación experimental, especializados en la ciencia del suelo o pedología, vinculados en forma inamovible a sus labores científicas, por contrato de larga duración y con la remuneración que permita la dedicación completa del estudioso en la continuidad del esfuerzo, impuesto por la propia naturaleza de los ensayos a realizar.

Esta excluye, en absoluto, las preocupaciones de la enseñanza, así como la imposición de la disciplina, no sólo a alumnos reunidos sin control previo, sino a maestros improvisados para enseñar lo que ellos mismos desconocen. Son pocos aquellos dirigentes necesarios que deben contratarse en el extranjero si no existen en el país, por falta de estudio de aquella ciencia, no obstante los esfuerzos que realiza la Facultad de química en la Universidad del Litoral. En último caso, convendría enviar algunos jóvenes egresados, con aptitudes comprobadas de investigadores, a perfeccionar sus estudios al lado de los mejores especialistas, buscados donde se encuentren y asegurar sus servicios, al regreso, con serios contratos previamente concertados.

Esta expresa separación de la función experimental de la reclamada por la enseñanza no importa condenar a la chacra al aislamiento. Una asidua publicidad de los resultados de los ensayos realizados, con especial relieve de las ventajas de las conquistas alcanzadas con ellos, ofrece al público la retribución más eficaz del tributo que le reclama el Estado para mantener estos centros de experimentación científica. Hoy más que nunca, son indispensables para satisfacer las necesidades de la producción frente a los progresos que, con iguales métodos, realizan las naciones competidoras en el mercado internacional. Si a ello se agrega el compromiso que contraen sus dirigentes de responder a todas las consultas que se les formulen y sostener un intercambio obligatorio de informaciones entre instituciones que persiguen iguales finalidades, su acción educacional queda perfectamente definida, sin las preocupaciones materiales de la vida.

El peligro de asociar la escuela a estas chacras tiene sus raíces en nuestro ambiente. El decreto del P. E. de la Nación del 22 de abril de 1907, creaba y organizaba chacras experimentales y dió el primer paso, si bien modestamente admitía la formación de apren-

lices. Se multiplican, nacionales y provinciales, y todas expiden certificados de competencia a profusión, sin la menor noción de la capacidad del país para absorber tantos diplomados: muy pronto no hallan dónde ocuparse. La defensa entre ellos se organiza entonces; los discursos, proyectos y decretos forman una profusa documentación ⁽²⁸⁾, en tanto que los mismos profesionales, ya de carácter universitario, reconocen que el público desconfía de su preparación y que no les queda otro recurso que refugiarse en las administraciones públicas, donde ni siquiera pueden especializarse: no lo admite la necesidad de hacer carrera burocrática y ocupar posiciones muy variadas, en procura de la mejora de sueldo con miras a la jubilación final.

Como no todos pueden ubicarse en ellas aparecen los más diversos proyectos. Alguno para que el certificado les brinde especiales favores en los bancos oficiales ⁽²⁹⁾ como el de Beiró, aplaudido, desde luego, por todos los interesados y sus instituciones gremiales. Otro para crearse privilegios en los planes de la futura colonización oficial, al extremo de provocar la reunión de un reciente congreso de aficionados para empeñarse en la institución de un « Consejo Nacional de Colonización »; y que no tenía otra verdadera finalidad que la de preparar el ambiente para realizar una « colonización racional con egresados de las escuelas de agricultura, nacionales y provinciales ». Según el proyecto aprobado en definitiva por los mismos, con los « de todos los demás establecimientos de enseñanza agrícola, inclusive los menores de las colonias-reformatorios que sirven a la ley n° 10.903 y otras instituciones, oficiales y particulares, que se incorporen, que protejan la infancia abandonada y los adultos, inmigrantes, indígenas, desocupados de ambos sexos, liberados, demás atendidos por la asistencia social y patronatos nacionales, provinciales, particulares y semioficiales adheridos ».

Lo más que puede admitirse es que las chacras experimentales, recién cuando hayan conseguido resultados con un tipo especial de semillas o plantas, hayan aclimatado variedades nuevas, o las hayan creado más adaptables al ambiente que las existentes, establezcan viveros propios. Permitirán la divulgación de estos tipos seleccionados, sometidos al riguroso control de origen, y sus beneficios eco-

(28) R. ALLEN, *Enseñanza agrícola. Documentos orgánicos*, 1929.

(29) H. Cámara de Diputados de la Nación, sesión de 29 de septiembre de 1920.

nómicos constituirán la más eficaz enseñanza y el más sólido fundamento de los prestigios de la misma chacra. Esta propaganda será la más provechosa y la que rendirá con creces los mayores beneficios a la región en que pueden extenderse, dentro o fuera de su propia zona de influencia directa.

VII

LA ESTACIÓN EXPERIMENTAL AGRÍCOLA DE TUCUMÁN

En todo sentido ofrece un modelo, calcado en similares europeos y americanos que debe guiar a todo gobierno bien inspirado, no sólo en vista de los resultados que ha conseguido alcanzar, merced a su ejemplar organización técnica y administrativa, sino a las circunstancias que provocaron su creación. El malestar preocupaba a la industria tanto como a la agricultura. El Estado no atinaba en dar con una solución salvadora. La depresión económica parecía excluir todo nuevo gravamen. Se apeló a la ciencia una vez más: severamente orientada, ajena al ambiente político y aplicada sin atender recomendaciones, a plazo breve señaló una radical y profunda evolución general.

La principal industria de la provincia estaba en decadencia, acen tuada de año en año y con grave peligro de quedar sin materia prima que entregar a sus costosos ingenios azucareros: las rentas fiscales que permiten al gobierno mantener su administración general decaían en igual forma. El senador provincial D. Alfredo Guzmán, progresista industrial, presentó a la Cámara de que formaba parte un proyecto de modesta apariencia. La Legislatura lo aprobó sin oponer reparos. La ley promulgada en 16 de enero de 1907 autorizaba al P. E. para ampliar los laboratorios de química y bacteriología con miras a crear una Estación experimental agrícola.

Para asegurar su instalación definitiva, por ley del 12 de julio de 1909, se adquirieron terrenos en extensión de 20 hectáreas y algunos viejos edificios. Se la organizó bajo el modesto nombre de « oficina », para tener « a su cargo todo lo relativo al mejoramiento y fomento de los cultivos de la provincia, a la implantación y aclimatación de nuevas especies, al estudio de los medios necesarios para combatir las plagas y prevenir su importación, así como a la adopción de las medidas coercitivas necesarias al efecto, y en general, todo aquello que se relacione con los trabajos agrícolas de la

provincia, en todas sus fases». Así reza el art. 2 de su ley de creación del 27 de julio del mismo año.

Se entregaba su dirección técnica al Sr. R. E. Blouin, ex director de la estación experimental de Audubon Park, en Luisiana; se le había contratado a mérito de la autorización dada al P. E. por la primitiva ley de 1907. Se designaba una junta para asesorarlo, compuesta de 3 industriales y 2 cañeros, designados por el P. E. con acuerdo del Senado y por 3 años, pero reelegibles. Para cubrir los gastos se creaba un impuesto adicional de 5 centavos $\frac{m}{n}$ por tonelada de caña, destinado exclusivamente a ese objeto, no obstante la situación de crisis de la industria. La junta podía imponer multas en caso de resistencia para adoptar medidas de policía sanitaria vegetal. La estación dependía del P. E.; pero por ley del 5 de diciembre de 1922, se declaró autónoma y se aclararon algunas de las disposiciones de la ley anterior, sin alterar las fundamentales. El reglamento del 10 de junio de 1910 se substituyó por otro del 19 de mayo de 1932 que amplía las tareas de la institución; y luego se completó con el del 28 de abril de 1933 que reglamenta la asistencia del personal.

No nos proponemos detallar la intensa labor desarrollada en esta estación experimental, a cargo del director Dr. W. E. Cross, desde hace más de 20 años. Se encuentra reflejada en su propio boletín mensual. La «Revista Industrial y Agrícola de Tucumán» se publica regularmente desde 1910, sin perjuicio de múltiples memorias adicionales y circulares profusamente distribuídas, dentro y fuera de la provincia. Es la forma de enseñanza que cuadra a estas instituciones que agregan ahora informaciones radiotelefónicas semanales destinadas a combatir la monocultura en la provincia ⁽³⁰⁾, y retribuyen con creces el tributo que su sostenimiento reclama de industriales y agricultores; propaganda, consejos y recomendaciones de alto valor científico aplicables con provecho al ambiente y en la hora presente. Las mismas secciones que se reparten la labor técnica y la completan, de agricultura, química, horticultura, botánica, entomología vegetal y patología, cada una de ellas a cargo de un especialista, señalan la diversidad de interesantes cuestiones estudiadas bajo el control técnico superior de la dirección.

En el especial problema del regadío, consultada esta última, nos afirma, sin mayores detalles, que «los experimentos han

(30) W. E. CROSS, *Circular* n° 45, 1933.

demostrado que los rendimientos de caña por hectárea son óptimos cuando se emplea la irrigación para suplementar las lluvias, en tal forma que la planta disponga siempre de una abundancia de agua, siempre, entendiéndose, que los terrenos sean bien drenados, a fin de evitar el estancamiento del agua en los mismos». En Tucumán el problema del riego no reviste la importancia que para Patagones. Con 800 a 1200 mm. de lluvias anuales, con dominante proporción desde octubre a mayo, precisamente durante los meses del crecimiento de la caña, sólo la presenta en años secos, con no menos de 500 mm anuales. Pero si no la tiene para la caña de azúcar, en cambio, la presenta para otros varios cultivos industriales, para los cuales el riego sólo será *conveniente*, sin llegar a ser *indispensable* como en zonas desérticas del carácter de las de Patagones.

Uno sólo de los triunfos de la estación bastaría para justificar su creación y demostrar la utilidad que pueden reportar las similares. La degeneración repentina de la caña criolla que se acentuó en los años de 1915 y 1916, pero que se venía señalando en un lento proceso de decadencia marcada desde tiempo atrás, encontró en la estación, entre dos mil variedades experimentadas con perseverancia, las cañas moradas de Java n° 36 y 213 que debían dar nuevo impulso a la industria. Constituyen desde entonces la base de la renovación salvadora de los cañaverales, aun cuando la estación tiene otras nuevas y mejores variedades, especialmente adaptables a algunos suelos que los agricultores usan ya.

La Estación cubre sus gastos de \$ 150 000 $\frac{m}{n}$ anuales con el importe de 5 centavos por Tn. que le proporcionan los 3 millones anuales de producción de los ingenios de todo el norte. En una de sus publicaciones ⁽³¹⁾, calculaba la producción de la caña criolla en 400 kg. por surco con un gasto en cultivo de 1,80 $\frac{m}{n}$, o sea \$ 4,— moneda nacional. La Java, en cambio, producía en el mismo surco 800 kg. con un gasto de \$ 0,80, o sea 1,— \$ $\frac{m}{n}$ por tonelada. La renovación de la caña aseguraba una economía neta de \$ 3 $\frac{m}{n}$ por Tn. En la producción total, la economía anual realizada pasaba de los diez millones de pesos moneda nacional. Muchos años puede vivir, trabajar e investigar la estación sin anotarse otro triunfo igual. Tiene conquistado su prestigio con aquél; y la economía general asegurada para la región justifica plenamente su subsistencia duradera.

(31) « Rev. Ind. y Agr. de Tucumán », año VII, n° 1 y 2, pág. 73, 1916.

Otro estudio que reviste interés para las tierras de Patagones es el que ha realizado en beneficio de grandes extensiones de terrenos sin riego y con lluvias escasas, dedicadas a una ganadería muy primitiva y rudimentaria. A base de un gran número de ensayos con forrajeras importadas, especialmente de Australia y Sud Africa, ha encontrado que en terrenos secos «la grama Rhodes», nombre del gran colonizador Cecil Rhodes, «y el pasto elefante» dan excelentes resultados. A base de estas gramíneas perennes pueden formarse potreros de pastos permanentes susceptibles de sostener uno y hasta dos animales por hectárea durante todo el año. Al duplicar o triplicar la renta de tierras mucho más extensas que las plantadas con caña y dar mayor regularidad a esta producción, el triunfo no ha sido de menor importancia.

Ha conseguido demostrar que la grama Rhodes se asocia admirablemente a la alfalfa; y que esta mezcla produce bien, dura mucho en terrenos en que la alfalfa sola no prospera y que resiste el pisoteo de los animales. Para estos mismos terrenos de secano se han podido recomendar varias otras gramíneas de gran utilidad, así como la penca sin espinas que proporciona un forraje de urgencia para las zonas secas, pues ofrece un alimento con que la hacienda puede sostenerse durante varios meses. Sin poder afirmar que estos ensayos son adaptables en la altiplanicie de Patagones, es de suponer que con igual perseverancia se hallarían los mejores tipos y variedades que se aclimatarían a sus especiales condiciones.

Una enumeración de los distintos estudios realizados por la estación que ha tenido que ensancharse hasta ocupar 90 hectáreas, permite darse cuenta cabal de su real importancia. Sus investigaciones son seguidas con real interés, sus recomendaciones adoptadas con entusiasmo y plena confianza, sus consejos solicitados por agricultores e industriales, y el valor científico de sus estudios reconocido por los institutos similares extranjeros. Sus prestigios son tales que los industriales del arroz, los del tabaco, de las plantaciones de hortaliza, respectivamente en Medinas, la Cocha y Lules reclaman la fundación de subestaciones filiales en sus propios centros de producción, para poder estudiar los problemas que afectan al cultivo y a la industrialización de sus productos. La zona de secano reclama otra con igual finalidad renovadora.

VIII

EL INSTITUTO EXPERIMENTAL Y DE INVESTIGACIÓN AGRÍCOLA
DE SANTA FE

Los futuros ensayos que deberá reiniciar la chacra de Patagones, si bien dominados por la preocupación fundamental del riego, se inspirarán en los de esta estación y se repetirán para las tierras secas que siempre quedarán disponibles, dentro del territorio de la provincia de Buenos Aires o no, fuera de la zona dominada por las obras de riego proyectadas. No hará sino perfeccionar sus investigaciones iniciadas en 1906, adaptadas al concepto moderno que las orienta con relación al estudio edáfico de sus suelos respectivos; y al de investigación encaminada a la aclimatación de cultivos introducidos de afuera, o de variedades híbridas formadas en la misma región, para someter a métodos científicos el aprovechamiento benéfico de las tierras estudiadas, ya sea entregadas al regadío o conservadas en su actual estado primitivo. Si bajo el punto de vista del riego la estación tucumana ofrece poco material de estudio, en cambio, bajo el aspecto cultural propiamente dicho, presenta un ejemplo digno de imitación, así como en su organización administrativa, lograda al poco tiempo de su fundación.

Así lo ha comprendido perfectamente la provincia de Santa Fe ante la necesidad de iniciar una racionalización de sus métodos de cultivo, la selección de especies vegetales y la búsqueda de nuevos elementos de mayor rendimiento, para reanimar la agricultura y la ganadería, en franco proceso de decadencia, en gran parte de su territorio. Su gobierno, en un gesto que le honra, deseoso de oponer los dictados de la ciencia experimental a la improvisación y al empirismo que han agotado las fuentes más nobles de la producción agropecuaria de la provincia, ha resuelto crear un « Instituto experimental y de investigación agrícola », inspirado en el modelo técnico y en la organización administrativa de la « estación experimental agrícola de Tucumán ».

La degeneración de los alfalfares cuya vida se ha reducido de 25 a 5 años así como su rendimiento, y la introducción de nuevas forrajeras que han traído plagas desconocidas antes, exponen a la provincia a carecer de pastos para sus clases refinadas de ganado. El bajo rinde de los linos, la mediocre calidad de los trigos, la ex-

plotación desordenada de los bosques, etc., crean una depresión económica cuyo origen debe buscarse en el agotamiento de los suelos cuya fertilidad ha sido proverbial y de la que se ha abusado sin medida.

El gobierno, ante el resultado del modelo tucumano, no ha trepido en crear un organismo autártico, desvinculado de la política al que ha asegurado recursos propios al gravar los principales productos agrícolas y forestales. A las secciones técnicas ha agregado otras de carácter social, de economía rural y geografía agrícola, funciones complementarias que permiten mayor unidad en la acción de reconstrucción económica que mueve la iniciativa. Aun cuando sus resultados no puedan palpase de inmediato, demuestra un concepto exacto respecto a las causas fundamentales del malestar de la producción que, así como ha tardado en exteriorizarse por el mal uso de suelos fértiles, demandará también mucho tiempo en alcanzar su segura corrección y su inevitable rehabilitación.

Un solo detalle queremos hacer resaltar. El personal técnico contratado debe todo su tiempo y actividades al Instituto y no puede aceptar otras tareas rentadas. Del mismo modo, no se crea con propósitos de lucro, esto es para hacer plantaciones por cuenta del Estado y para industrializar sus productos. Si se admiten algunas pequeñas instalaciones han de servir de modelo para facilitar la experimentación, directa y oficial, al efecto de mejorar métodos o de perfeccionar normas de elaboración. La extensión de los campos experimentales debe ser la estrictamente necesaria para realizar los ensayos: todo excedente importa recargo innecesario de gastos. La propagación de especies aclimatadas o alcanzadas por hibridación en viveros propios, más que una finalidad comercial perseguida con la venta de productos, importa el control de su producción y un freno opuesto a la dádiva liberal, desordenada y peligrosa cuando depende del gobierno.

Pensar en el porvenir es genuina función de gobierno. No es característica de los nuestros y de ahí los plácemes que merecen estas resoluciones a las que estamos poco habituados. Los pueblos no pueden premiar estos actos como lo hacía Casaroes en la anécdota que nos ha recordado el emir Arslan, a propósito del «sabio cultivador», en sus «Breves leyendas del Oriente». No podemos dejar de reproducirla:

«En un atardecer el rey de Persia, Casaroes, salió a pasear por los alrededores de Teheran, y habiendo visto a un viejo cultivador, de bar-

«ba larga y blanca como la nieve, que encuadraba su cara arrugada ocupado en plantar dátiles (sabido es que estos árboles tardan veinte años para dar frutos), el rey se paró delante del anciano y le preguntó:

«—¿Acaso esperas tú vivir para comer frutas de estos dátiles, estando ya en el fin del camino de la vida?

«—¡Oh, rey! —contestóle el anciano—, los que nos han precedido «han plantado y hemos comido! Plantaremos a nuestro turno, y los que «nos sucedan, comerán.

«—¡Zeh! —exclamó Casaroes, admirando la contestación feliz del «anciano, y le gratificó con mil denarios.

«El anciano agradeció efusivamente al rey, y agregó con una dulce «sonrisa:

«—Es la primera vez que los dátiles dan tan rápidamente frutos tan «deliciosos.

«Seducido por la réplica, Casaroes ordenó que le entregaran otros mil «denarios.

«—Lo más extraordinario es que estos dátiles han dado frutas dos «veces seguidas.

«En el colmo del contento, Casaroes lo gratificó con otros mil denarios, «haciendo votos por que su larga vida terminara en paz y felicidad».

El ministro, Ing^o Alberto T. Casella, animador de la empresa, resulta un «sabio cultivador». Santa Fe debe aspirar a que la palmera que acaba de plantar alcance a dar sus frutos: para eso no debe escatimarle sus afanes y prodigarle su protección al través del tiempo y de los gobiernos.

CONCLUSIONES

La provincia de Buenos Aires, la más extensa y poblada de las de la República Argentina, que se considera la más rica, con problemas relacionados con la producción de su industria agropecuaria tan graves como en otras, ¿no será capaz de plantar otra palmera en Patagones, aun cuando tenga que esperar largos años para recoger sus frutos?

En el presupuesto de su administración para el año 1934 que importa 125 millones de pesos $\frac{m}{n}$ en cifras redondas, la Dirección de agricultura, ganadería e industrias absorbe 37 000 \$ $\frac{m}{n}$, o sea algo menos de 0,3 %. La provincia cuenta con 2 escuelas de agricultura, la frutícola «Osvaldo Magnasco» en Dolores y la de industrias rurales «Nicanor Ezeiza» en Coronel Vidal; una tercera imaginaria, con profesores pero sin alumnos, en Patagones; 4 viveros en Cazón, Baradero, Dorrego y Miramar; y 2 chacras en Do-

rrego anexa al vivero y la de Patagones, ésta clasificada de experimental que no representa en aquel conjunto un gasto mayor de 25 000 \$ $\frac{m}{n}$ anuales, o sea el 0,02 % del presupuesto general de la administración de la provincia.

Dentro del partido de 1 369 000 hectáreas, las tierras fiscales no alcanzan a ocupar el 25 % y el producido normal de los arrendamientos, variables desde 0,40 a 1,20 \$ $\frac{m}{n}$ anuales por hectárea, en cifras redondas, representa una entrada de 300 000 \$ $\frac{m}{n}$. El Estado de Utah, en el árido oeste de los EE. UU. de N. América, en 1912 no tenía más de 300 000 habitantes, pero destinaba, ya en esa época, a la experiencia agrícola de su chacra, famosa con el tiempo, el 10 % de su presupuesto general. Sus autoridades sabían que sus tierras, con lluvias comparables a las del partido de Patagones, no podían sufrir evolución alguna sin el concurso científico de su chacra experimental, cuyos beneficios se han extendido después a varios estados vecinos.

Para la chacra de Patagones dos tipos de ensayos se hacen necesarios. Los que se refieren al cultivo de tierras regadas, previamente preparadas, como señalamos antes; y los que tienden a buscar la producción de cosechas remuneradoras sin riego, donde se impone la implantación de los métodos del cultivo de secano, de características indispensables a descubrir por la experimentación directa en el ambiente físico del partido. No hay duda que los resultados serán adaptables fuera del territorio de la provincia; pero es de suponer que se daría por satisfecha si sus beneficios alcanzaran a servir los cuatro millones de hectáreas en sus partidos más inmediatos, cuya edafología y ecología ofrecen tantas analogías visibles. Aun cuando sólo se consiguiera duplicar su actual producción, el éxito de la chacra se habría asegurado. En el primer tipo de ensayos su triunfo será siempre más amplio y completo.

Para lograrlos basta seguir el ejemplo de la Estación experimental agrícola de Tucumán y adoptar sus directivas esenciales, como acaba de hacerlo Santa Fe con tanto acierto. Es preciso:

- 1º Asegurarle, por ley, una organización autárquica completa, técnica y administrativa, con absoluta independencia económica;
- 2º Contratar personal técnico especializado en el extranjero, desde el momento que no lo hay en el país;

- 3º Crear un consejo consultivo integrado con 5 interesados en el porvenir de la región, 3 de ellos residentes en Carmen de Patagones y 2 arrendatarios con más de 5 años de residencia en las tierras fiscales del partido;
- 4º Sin alterar los actuales procedimientos de recaudación, depositar directamente su producido líquido a la orden del concejo en la sucursal del Banco de la Provincia en Patagones;
- 5º Establecer la supresión absoluta de todo intento de creación de una escuela de enseñanza agrícola, cualquiera que sea su carácter, confiar en la acción cultural de la chacra por la difusión de sus investigaciones y dejar las cláusulas reglamentarias para el articulado de la ley respectiva.

El edificio construído para alojar alumnos se presta para la instalación de los laboratorios que reclama la chacra experimental pobremente tratada hasta la fecha. Con sus propios recursos completará las construcciones que se requerirán para lo sucesivo, por la multiplicidad de ensayos que se le encomiendan y cuya subdivisión, en secciones, convendría dejar librada a la resolución del director contratado, a quien debería dejarse la libertad de indicar sus propios colaboradores.

Es evidente que a la provincia se le presenta por resolver otro problema más amplio para abarcar todo su territorio con una acción de la misma índole, de experimentación regional diversificada y de carácter múltiple, sometida a un régimen técnico y administrativo uniforme de iguales características. Ello exigirá crear recursos más importantes e imponer otras fuentes de producción directamente favorecidas por estas investigaciones, la ganadería y la agricultura. Se nos ocurre que los antecedentes de la chacra experimental de Patagones y la naturaleza árida de sus tierras, únicas en la provincia, ofrecen oportunidad de dar para ella el primer paso que propiciamos decididamente.

Buenos Aires, marzo de 1935.

COTEJOS ECONOMICOS Y SELECCION ECONOMICA

POR EL ING. MAURICIO DURRIEU

(Continuación *)

36. — CAPITAL PRESENTE REPRESENTATIVO DE LOS INTERESES DEL CAPITAL INVERTIDO Y OTRAS CARGAS FIJAS. — Sabido es que todo capital invertido en una operación económica, devenga intereses hasta tanto queda redimido. A las inversiones, pues, efectuadas en las instalaciones industriales, la construcción de obras, etc., corresponderá desde luego un interés por el solo hecho de la ocupación del capital, *y mientras quede éste aplicado al fin indicado* ⁽¹⁾.

Mas, dijimos que serían consideradas como otras cargas invariables las emergentes de la conservación de la instalación, obra, etc., durante su inactividad, con el fin de mantenerla en perfectas condiciones para prestar servicio.

Es práctica la de referir tales expensas al capital de creación de los medios a conservarse para el servicio, o sea $B + H + F$, mediante una cuota porcentual media:

$$r_1 \left[(B + H + F) - \frac{B_n + H_n + F_n}{(1 + r)^n} \right]$$

Por otra parte, los intereses estarán asimismo referidos al capital, —pero total en este caso,— mediante otra cuota porcentual: $r'[(C)]$.

Ambas cuotas podrán reunirse en una sola, r_1' , referida a todo el capital de primer establecimiento, en las obras de ingeniería,

(*) Ver T. CXXIII y sig.

(1) Este concepto tiene la importancia de indicar que no puede calcularse legítimamente en un cotejo económico con rédito ilimitado, que supone la inversión igualmente de duración indefinida para el capital.

desde luego, y también en algunos casos de instalaciones industriales, si se tuviese por suficiente la exactitud del procedimiento o los valores de T y A fuesen de escasa monta con relación a los restantes.

Con todo, la cuota parcial r_1 , correspondiente a la conservación general de la instalación, obra, etc., mientras permanece en la inactividad, también puede resultar variable, y en muy diverso grado, en las obras de ingeniería, según sea el tipo de esas obras, etc., porque pueden estar destinadas a prestar servicios intermitentes y por plazos mudables.

En tanto el servicio fuere interrumpido por breve tiempo, subsistirán sin variar sensiblemente los factores de la utilización; mas, si la paralización se prolongase, aún quedarán parcialmente en función aquellos factores. El costo mínimo ocurrirá en el caso de una suspensión indefinida, y resultará de la dirección, vigilancia, conducción bastantes de la obra, instalación, estructura, etc.; de los abastecimientos de materiales y accesorios indispensables para atender, reparar y aun remover dicha obra, etc., a consecuencia de los deterioros que experimente por la acción del tiempo;— y de las costas de oficinas y otros requerimientos de la conservación. Si bien los transportes podrán llegar a ser en tales circunstancias de muy escasa monta, tampoco podrá descuidárseles. Por último, los costos por derechos, impuestos y seguros no quedarán suspendidos durante la inactividad del servicio, e igualmente serán ellos computados.

Las cargas fijas a que nos referimos de esta suerte, pueden hallarse englobadas en las que sean consideradas al tratar de la conservación o del servicio o de la explotación de la obra, etc. No tiene ello inconveniente, siempre que el método de equiparación no varíe de una instalación, etc., a las demás con ella cotejadas. Mas, los intereses del capital invertido serán considerados con preferencia aisladamente de las cargas variables, a una tasa que podrá ser la misma, r , de los cálculos de anualidades, o bien distinta. — aun en el caso de que fuese el mismo el monto del capital a que aquellas cargas debiesen referirse.

A pesar de que es usual aplicar las cuotas r y r_1 a los montos totales de las inversiones correspondientes en el día inicial del cotejo, el procedimiento carece de exactitud, por cuanto concede al *capital realmente invertido*, (en general expresado por la diferencia entre el capital inicial y el actual o el residual de la obra,

etc., transferido al día inicial), un rédito mayor que el que parece atribuírsele ⁽¹⁾.

Por razones, pues, de corrección matemática, emplearemos los valores exactos de los capitales invertidos.

Sea, ahora, en general $C - \frac{C_n}{(1+r)^n}$ la verdadera inversión de capital correspondiente a cierto destino. Podemos admitir que el interés o la carga porcentual anual de esa inversión, se reuna al final de cada año, expresándose por

$$\left(C - \frac{C_n}{(1+r)^n}\right)r'.$$

Retrotraída cada suma de éstas al día inicial del mismo año, importará:

$$\left(C - \frac{C_n}{(1+r)^n}\right)\frac{r'}{1+r}$$

y el capital presente inicial estará formado por la suma de esas mismas cantidades retrotraídas al día inicial del período.

Para la formación, entonces, del capital presente determinado para los intereses del capital total y para las cargas de conservación general, ocurrirán como antes cuatro casos, que para cada concepto de inversión pasamos a tratar.

37. — INTERESES DEL CAPITAL TOTAL. — A ese capital, de monto C , sólo corresponden valores residuales para los sumandos B , H y F . Si cada una de estas partes ofreciese variación en el período de

(1) Si, en efecto, un capital invertido es $C - \frac{C_n}{(1+r)^n}$, en vez de C , al calcular con C , se aplica una cuota porcentual efectiva $\left(C - \frac{C_n}{(1+r)^n}\right)r + \frac{C_n}{(1+r)^n}r$.

Llamemos $\frac{1}{m}$ a la relación $\frac{\frac{C_n}{(1+r)^n}}{C - \frac{C_n}{(1+r)^n}}$ y también escribamos $C - \frac{C_n}{(1+r)^n} = C_1$, de suerte que $\frac{C_n}{(1+r)^n} = \frac{C_1}{m}$. Entonces, $C_1r + \frac{C_1}{m}r = C_1\left(r + \frac{r}{m}\right)$. Y se ve que el interés de C_1 es mayor que r .

Los sumandos serán, pues:

$$\left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{1+r} , \quad \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{(1+r)^2} , \quad \dots$$

$$\dots \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{(1+r)^a}$$

y la suma es

$$\begin{aligned} & \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{1+r} \left[1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{a-1}}\right] = \\ & = \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r'}{(1+r)^a} [(1+r)^{a-1} + (1+r)^{a-2} + \dots + 1] = \\ & = \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a}\right) \frac{r' [(1+r)^a - 1]}{r (1+r)^a} = [C - C_a (1 - T_a)] \frac{r'}{r} T_a \quad [22] \end{aligned}$$

39. — *Segundo caso.* — Si, en cambio, $n = l$, el cálculo se repite para esa extensión de tiempo en tanto el plazo de subsistencia fuere menor que los de vida o duración que correspondan a B , H y F . En tal supuesto, tendremos

$$\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^l - 1}{(1+r)^l} = [C - C_l (1 - T_l)] \frac{r'}{r} T_l \quad [23]$$

40. — *Tercer caso.* — Sea, ahora, $n = hl$, admitiendo a la vez que $hl \leq l_b$; $hl \leq l_h$; $hl \leq l_f$.

De igual modo que en los casos precedentes, y en atención al valor del capital presente de establecimiento o construcción y renovación dado por la [4], los réditos anuales *anticipados* valdrán

$$\left[\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l}\right) \frac{(1+r)^{hl} - 1}{(1+r)^{hl}} \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l - 1}\right] \frac{r'}{1+r}$$

y considerado cada uno de ellos trasladado al día inicial del período hl y sumando los valores respectivos, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l} \right) \frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{hl}} \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} r' \left[\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^{hl}} \right] = \\ = \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l} \right) \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} \left[\frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{hl}} \right]^2 = \\ = \left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l} \right) \frac{r'}{r} \frac{T_{hl}^2}{T_l} \quad [24] \end{aligned}$$

En el supuesto de que $h = \infty$, la [24] vuélvese

$$\left(C - \frac{C_l}{(1+r)^l} \right) \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} \frac{r'}{r} = \left[C - C_l (1 - T_l) \right] \frac{r'}{r} \frac{1}{T_l} \quad [24_a]$$

41. — *Cuarto caso.* — La última hipótesis, siempre con igual concepto de que $n \leq l_b$; $n \leq l_h$; $n \leq l_f$; sería $n = hl + a$, en que $a < l$.

Da entonces la [5] el capital presente de instalación o construcción y renovación fundamental

$$\begin{aligned} (C - C_l) \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{(1+r)^{(h+1)l}} + C_l - \frac{C_a}{(1+r)^{hl+a}} = \\ = (C - C_l) \frac{T_{(h+1)l}}{T_l} + C_l - C_a (1 - T_{hl+a})^{(1)}. \end{aligned}$$

El interés anual, trasladado al comienzo de cada año, será:

$$\left[(C - C_l) \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{(1+r)^{(h+1)l}} + C_l - \frac{C_a}{(1+r)^{hl+a}} \right] \frac{r'}{1+r}$$

(1) Cuando se incorpora a C_l , también se llega a

$$\begin{aligned} \left[C \frac{(1+r)^{(h+1)l}-1}{(1+r)^{(h+1)l}} - \frac{C_l}{(1+r)^l} \frac{(1+r)^{hl}-1}{(1+r)^{hl}} \right] \frac{(1+r)^l}{(1+r)^l-1} - C_a \frac{1}{(1+r)^{hl+a}} = \\ = C \frac{T_{(h+1)l}}{T_l} - C_l (1 - T_l) \frac{T_{hl}}{T_l} - C_a (1 - T_{hl+a}) \end{aligned}$$

y la sucesión de estos intereses, retrotraídos al origen del período, sería :

$$\left[(C - C_l) \frac{T_{(h+1)l}}{T_l} + C_l - C_a (1 - T_{hl+a}) \right] \frac{r'}{r} \cdot T_{hl+a} \quad [25]$$

42. — CARGAS ANUALES INVARIABLES DE ATENCIÓN Y CONSERVACIÓN DE LA INSTALACIÓN, OBRA, ESTRUCTURA, ETC., EN LA INACTIVIDAD. — Volvemos a hacer notar que la expresión de que vamos a valernos para calcular estas cargas, constituye un recurso o artificio. Cuando el verdadero importe de tales cargas puede extraerse de una contabilidad, ninguna duda cabe de que otra expresión o proporción cualquiera referida a cierto capital, por más racional que aparezca, ha de ser preferida para la estimación de esas cargas, a su monto efectivo. Mas, lo corriente en los cotejos económicos no es que se tengan a mano datos emergentes de la contabilidad de la explotación de las obras, instalaciones, etc. A lo sumo, existirán en algún caso esos datos para unas pocas de las obras, instalaciones, etc., equiparadas, y en tal caso, lo mismo que si faltasen para todas, se echará mano de un medio de estimación para los datos faltantes, cuando menos, y hasta para sustituir a los existentes, si la paridad de los procedimientos de cotejo así lo aconsejase.

En tesis general, entonces, pondremos que las cargas anuales de que aquí tratamos, se expresen por

$$r_1 \left[(B + H + F) - \frac{B_n + H_n + F_n}{(1 + r)^n} \right]$$

Ese será su importe anual, alcanzado al fenecimiento de cada año, y que habrá de retrotraerse, en forma análoga a la que vimos para los intereses del capital, al día inicial del período n , para constituir con su suma un capital presente parcial.

Fuera ocioso reiterar los cálculos que ya conocemos, para este nuevo proceso de formación de un capital presente.

Si, como ya lo viéramos en el número 37, las vidas, l_b , l_h o l_f , fuesen de menor duración que n , sería menester el desdoblamiento del cálculo para tomar en consideración la circunstancia con arreglo a uno u otro de los cuatro casos generales, según corresponda. Fuera de esta situación, se aplicarán los resultados obtenidos en los números 38 a 41.

Podríamos escribir, en tal supuesto:

para $n = a < l$

$$\left[(B+H+F) - \frac{B_a+H_a+F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{r_1 [(1+r)^a - 1]}{r (1+r)^a} ; \quad [26]$$

para $n = l$

$$\left[(B+H+F) - \frac{B_l+H_l+F_l}{(1+r)^l} \right] \frac{r_1 [(1+r)^l - 1]}{r (1+r)^l} ; \quad [27]$$

etc.

43. — FORMACIÓN DEL CAPITAL PRESENTE TOTAL. — La variedad de los casos que pueden presentarse en los estudios del género que realizamos, hace muy pesada la presentación de fórmulas adecuadas para los mismos que condensen la expresión del capital presente correspondiente a cada uno.

A falta de una expresión general, haremos ver cómo se forma el capital presente total, tomando por caso el que se aplica a las hipótesis $n \leq l_b$; $n \leq l_h$; $n \leq l_f$.

44. — *Primer caso.* — Sea $n = a < l_b, l_h$ y l_f .

En este supuesto, habrá valores actuales B_a, H_a y F_a , y atento a que no los hay para C_u y C_v , podemos escribir, partiendo de la [1], la [3], la [22] y la [26]

$$\begin{aligned} C_{pt} = & \left[C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{1}{(1+r)^a} + \\ & + \left(C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right) \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^a} + \\ & + \left[B + H + F - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{r_1}{r} \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^a} . \quad [28]^{(1)} \end{aligned}$$

(1) Podrá llamar la atención que escribamos en el capital presente al origen del período el valor efectivo, v. gr.:

$$C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a}$$

multiplicado por $\frac{1}{(1+r)^a}$. Débese esto a que suponemos que ese capital es el que reconstituye la anualidad d_a al término del plazo a , y entonces, trasladado al día inicial, debe quedar dividido por $(1+r)^a$.

Para demostrar que así es, observemos que si al final del plazo a , al capital

45. — *Segundo caso.* — Admitamos que $n = l$ para todos los sumandos. Entonces, por analogía con el caso anterior, y basándonos en la [1], la [2a], la [23] y la [27]:

$$C_{pi} = \left[C - \frac{B_l + H_l + F_l}{(1+r)^l} \right] \frac{1}{(1+r)^l} + \\ + \left(C - \frac{B_l + H_l + F_l}{(1+r)^l} \right) \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^l - 1}{(1+r)^l} + \\ + \left[B + H + F - \frac{B_l + H_l + F_l}{(1+r)^l} \right] \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^l - 1}{(1+r)^l}. \quad [29]$$

46. — *Correlación de las cargas fijas y de los capitales presentes respectivos.* — La correlación debe existir, como es claro, de manera que tanto es posible calcular las cargas mediante los capitales como, recíproca y más ordinariamente, los capitales presentes, deduciéndoles de las primeras.

Un desarrollo completo del punto, tornaría muy pesado atenta la variedad de los casos. Indicaremos por medio de un ejemplo la manera de establecer la correlación,

Consideremos nuevamente la hipótesis $n = a < l_b, l_h$ y l_f .

Las cargas fijas estarán formadas por

	Anualidad para constituir el capital al cabo del plazo a
1) la anualidad de amortización del capital $(C-T) - (B_a + H_a + F_a) \frac{1}{(1+r)^a}$	$\left[(C-T) - \frac{(B_a + H_a + F_a)}{(1+r)^a} \right] \frac{r}{1+r} \frac{1}{(1+r)^a - 1}$
2) el interés anual del capital inicial invertido realmente	$\left[C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{r'}{1+r}$
3) la anualidad por cargas de conservación	$\left(B + H + F - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right) \frac{r_1}{1+r}$

$C - \frac{C_a}{(1+r)^a}$ se añade el importe de sus intereses simples a $r\%$, acumulados como anualidades, se tiene

$$C - \frac{C_a}{(1+r)^a} + \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \right) r \frac{(1+r)^a - 1}{r} = \\ = \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \right) [1 + (1+r)^a - 1] = \left(C - \frac{C_a}{(1+r)^a} \right) (1+r)^a = C(1+r)^a - C_a$$

que evidentemente es lo propio.

El capital constituido al término de a años por las tres anualidades preestablecidas, será el que resulte de sumar los productos de esas anualidades por el factor

$$z_a = \frac{[(1+r)^a - 1](1+r)}{r} \quad [30]$$

recíproco de d_a , —que representa la formación de capital alcanzada en a años mediante una anualidad de 1 \$. Así deducimos

$$\begin{aligned} & \left[(C - T) - \frac{(B_a + H_a + F_a)}{(1+r)^a} \right] + \\ & + \left[C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{r'}{r} [(1+r)^a - 1] + \\ & + \left(B + H + F - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right) \frac{r_1}{r} [(1+r)^a - 1] \end{aligned}$$

y trasladando este capital al día inicial y añadiéndole T , excluido de la amortización y que existe como valor permanente, a pesar de que no origine sino una carga por intereses, se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[T + (C - T) - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{1}{(1+r)^a} + \\ & + \left[C - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right] \frac{r'}{r} \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^a} + \\ & + \left(B + H + F - \frac{B_a + H_a + F_a}{(1+r)^a} \right) \frac{r_1}{r} \frac{(1+r)^a - 1}{(1+r)^a} \end{aligned}$$

que es el valor hallado en la [28].

(Continuad)

RELACIONES DE CARACTER ORDINAL EN LAS FORMAS FUNDAMENTALES DE 1ª ESPECIE

POR E. A. DE CESARE

1. — Entre los elementos fundamentales, generadores de una forma de 1ª especie, existen ciertas relaciones de carácter gráfico, como ser el separarse o no de dos pares de elementos, los conceptos de segmento y sentido proyectivos y más particularmente aún, ciertas relaciones de carácter ordinal, como p.ej., el sucederse o la ordenación de los elementos generadores, relaciones que desde el punto de vista intuitivo, pueden obtenerse de un modo casi inmediato.

Nuestro objeto actual, es obtener esos mismos resultados, situándonos en un punto de vista estrictamente lógico; quiere pues decir, que las intuiciones serán reducidas al mínimun y en este sentido, los gráficos que empleemos, deben considerarse, como simples andamiajes, utilizados con el solo fin de objetivar nuestras construcciones mentales.

No siempre, resulta fácil, escapar al empleo sub-consciente de la intuición, sobre todo en las cuestiones de carácter ordinal, debido a su inmediata evidencia respecto de la intuición, por cuyo motivo, en la teoría que pasamos a exponer, conviene una parsimoniosa medida, aún a riesgo de que se la juzgase excesivamente meticulosa.

2. *Ordenamiento circular.* — Partiendo del concepto de terna ordenada, tratemos de obtener el concepto de *sentido*, sobre una forma de 1ª especie:

$$v \equiv A, B, C, \dots$$

Consideremos un conjunto v , finito o infinito de elementos $A, B, C, \dots$. Diremos que el conjunto v (o forma, como también le llamaremos) está *ordenado circularmente*, si las ternas ordenadas de sus elementos, pueden repartirse en dos clases, σ y σ' , que no tengan elementos comunes, de modo que se cumplan las condiciones:

1ª Toda terna ordenada pertenece a una (y solo una) de las dos clases.

2ª Toda terna ordenada, cambia de clase, si en ella se permutan dos elementos cualesquiera.

3ª Si las ternas ordenadas (ABC) , (ACD) , pertenecen a la misma clase, la terna ordenada (ABD) también pertenece a dicha clase.

Cada una de las dos clases, σ , σ' , se dirá, que es un *sentido circular*, o más brevemente un sentido del conjunto u y los dos sentidos (o clases) correspondientes a las clases σ y σ' de una misma repartición se dirá que son sentidos opuestos.

Dos ternas ordenadas, si pertenecen a una misma clase σ , se dirá que son concordes, respecto del sentido (o clase σ); se dirá en cambio que son discordes, si pertenecen a distintas clases opuestas. Para expresar, simbólicamente que las ternas ordenadas (ABC) , (LMN) , son concordes, escribiremos:

$$v(ABC) = v(LMN) \quad [1]$$

y si son discordes:

$$v(ABC) = -v(LMN) \quad [2]$$

Se deduce de la definición que:

$$v(ABC) = v(ABC) \quad [2']$$

pues los dos miembros, expresan un mismo hecho.

Se tiene también que si es:

$$v(ABC) = v(PQR) \quad [r]$$

es:

$$v(PQR) = v(ABC)$$

puesto que las dos relaciones $[r]$, expresan, que las ternas ordenadas (ABC) , (PQR) , están incluidas en una misma clase.

Se tiene finalmente:

Si es:

$$v(ABC) = v(LMN) \quad [t]$$

$$v(LMN) = v(PQR)$$

es:

$$v(ABC) = v(PQR) \quad [t']$$

Las relaciones simultáneas (t) expresan que las ternas ordenadas (ABC) , (LMN) , (PQR) , están incluidas, en una misma clase u , luego vale la (t') .

Por lo tanto, valen la propiedad idéntica, reflexiva y transitiva, y en consecuencia las relaciones (1), (2), serán equivalentes a las relaciones:

$$-v(LMN) = -v(ABC)$$

$$\therefore -v(ABC) = -v(LMN) \quad [1']$$

$$-v(ABC) = v(LMN) \quad [2']$$

Indicaremos brevemente un sentido, con un solo símbolo literal, por ejemplo σ y en ese caso, el sentido opuesto a σ , se indicará con $-\sigma = \sigma'$:

Para expresar que la terna ordenada (ABC) , pertenece al sentido σ (o lo que es lo mismo, que está incluida en la clase que lo define) escribiremos:

$$v(ABC) = \sigma.$$

Finalmente, expresaremos este mismo hecho, diciendo en lugar de sentido σ , sentido (ABC) y escribiremos:

$$\sigma = v(ABC).$$

§ 3. — De las consideraciones anteriores, se deducen ya, algunas consecuencias.

1º *El sentido de una terna ordenada, se conserva, para toda permutación circular de la terna* (§ 2).

En efecto, teniendo en cuenta, la condición 2ª se tiene inmediatamente:

$$\begin{aligned} v(ABC) &= v(CAB) = v(BCA) = \\ &= -v(BAC) = -v(ACB) = -v(CBA). \end{aligned} \quad [\alpha]$$

2º *Si A, B, C, D , son cuatro elementos, para los cuales se tiene:*

$$v(ABC) = v(ACD) \quad [1]$$

resulta ser:

$$v(ABC) = v(BCD)$$

o en otros términos. *Si las ternas ordenadas (ABC) , (ACD) pertenecen a la misma clase σ , la terna ordenada (BCD) , pertenece también a σ .*

Por la 2ª condición (§ 2) sale de [1].

$$v(CDA) = v(CAB)$$

y de aquí, por la condición 3ª (§ 2).

$$v(CAB) = v(CDB)$$

esto es:

$$v(ABC) = v(BCD)$$

como resulta permutando C con A y luego con B en el primer miembro, y B , con D y luego con C en el segundo miembro.

En resumen, verificándose la [1], para los elementos A, B, C, D , valen las relaciones:

$$v(ABC) = v(ABD) = v(ACD) = v(BCD) \quad [r]$$

y en consecuencia, las cuatro ternas ordenadas que figuran en la relación (r) son concordes.

Como toda permutación circular de cada terna ordenada, no modifica el sentido de laterna (α), se deduce, que de la cuaterna A, B, C, D puede extraerse 12 ternas ordenadas, que pertenecen al mismo sentido $\sigma = v(ABC)$ y otras 12 ternas, que pertenecen al sentido opuesto:

$$- \sigma = v(BAC) .$$

Las 24 ternas así obtenidas, no son sino, los 24 arreglos que puede obtenerse con 4 elementos distintos agrupados de 3 en 3. Lo que antecede permite formular la siguiente

DEFINICIÓN. — Diremos que cuatro elementos A, B, C, D , son *subsiguientes o sucesivos*, en el conjunto (o forma) u , en el sentido $\sigma = v(ABC)$ si se verifica:

$$v(ABC) = v(ACD)$$

y en tal caso, se verificará la (r).

Puede generalizarse esta definición, para n elementos distintos de una forma, como sigue:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$, son n elementos distintos, de la forma u , diremos que se suceden en el sentido $(A_1 A_2 A_3)$ si se verifica:

$$v(A_1 A_2 A_3) = v(A_1 A_3 A_4) = \dots = v(A_1 A_{n-1} A_n) .$$

Del verificarse estas relaciones y teniendo en cuenta, lo demostrado más arriba [r], se deduce p. ej. el verificarse de las siguientes relaciones:

$$v(A_1 A_2 A_3) = v(A_1 A_3 A_4) = v(A_1 A_2 A_4) = v(H_2 A_3 A_4)$$

.....

y otras análogas, que se obtendrán, con la repetida aplicación del teorema recordado [r].

Las ternas ordenadas que de ese modo resultan, concordes con la terna $(A_1 A_2 A_3)$, son las ternas $(A_i A_j A_k)$ tales que $i < j < k$, más las ternas obtenidas por permutación circular, de cada una de ellas. En total serán pues:

$$\frac{1}{2} A_{n,3} = \frac{1}{2} n (n - 1) (n - 2)$$

ternas concordes con la $(A_1 A_2 A_3)$. Existe igual número de ternas, concordes con el sentido $(A_1 A_3 A_2)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \longrightarrow \sigma & & & \\ A_1 & A_2 & A_3 & & A_n & & v \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Cuando los elementos $A_1, A_2, \dots A_n$, de un conjunto u ordenado circularmente, sean sucesivos, diremos que dichos elementos, se suceden en el sentido σ de la forma u , o bien que la enupla ordenada $A_1 \dots A_n$, está dotada de un sentido sobre la u , o finalmente, que *pertenece al sentido* σ de la u .

Se dirá que dos enuplas ordenadas $(A_1 \dots A_n)$, $(A_1' \dots A_n')$ son concordes, o discordes respecto del sentido σ , según que estén ambas, incluidas en la misma clase σ , o que no lo estén.

§ 4. *Conjuntos ordenados*. — Admitamos como conocido el significado de los verbos: *preceder* y *seguir*,⁽¹⁾ utilizaremos estos conceptos, para dar la definición de *conjunto* ordenado.

Un conjunto de elementos cualesquiera, se dice que es *ordenado* (o mejor aún, ordenable), si entre sus elementos existe una relación que satisfice a las condiciones siguientes:

1º Dados dos elementos distintos A y B , es siempre posible decidir si A precede a B o si B precede a A , ambas circunstancias excluyéndose recíprocamente.

(1) Como se comprende, en cada caso habrá que especificar, cual sea el significado que deba atribuirse a dichos verbos.

Las proposiciones: A precede a B , B sigue a A , son consideradas como equivalentes.

2° Si A, B, C , son tres elementos distintos del conjunto y si A precede a B y B precede a C , también A precede a C .

Por ej. si α y β son dos números reales y convenimos en que la proposición: α precede β , signifique decir que $\alpha < \beta$ y que β sigue a α , signifique $\beta > \alpha$. se tiene que el conjunto de los números reales, es un conjunto ordenado, pues como es fácil verificarlo, se cumplen las condiciones 1ª y 2ª.

Si en la definición antes enunciada se permuta, el verbo preceder, por el verbo seguir e inversamente, entre los mismos elementos del conjunto, existe una nueva relación que satisface también a las condiciones 1ª y 2ª. Se dice que ésta nueva relación define un *ordenamiento inverso* u *opuesto* al anterior.

§ 5. TEOREMA. — *Todo conjunto ordenado circularmente es ordenado.*

Sea u el conjunto ordenado circularmente y σ uno de los sentidos de u .

$$\begin{array}{c} \text{--- } \sigma = \sigma' \longleftarrow \longrightarrow \sigma \\ \text{--- } \underset{\circ}{O} \quad \underset{\circ}{A} \quad \underset{\circ}{B} \quad \underset{\circ}{C} \text{--- } u \end{array}$$

Consideremos un elemento fijo O de u , y A, B , dos elementos cualesquiera de u .

Diremos que A precede a B si se verifica:

$$v(OAB) = \sigma \quad [1]$$

diremos que A sigue a B si es:

$$v(OAB) = \text{--- } \sigma \quad [2]$$

Si A, B, C , son tres elementos cualesquiera de u y se tiene:

$$v(OAB) = v(OBC) = \sigma \quad [3]$$

por la condición 3ª que define el ordenamiento circular, se tendrá:

$$v(OAC) = \sigma \quad [4]$$

De las relaciones [1], [2], resulta: α) que dados dos elementos A, B , cualesquiera de u , se puede decidir, si A precede a B o si B precede a A , el verificarse de un caso, excluyendo el otro.

De [3], [4] resulta: β). Dados tres elementos distintos cualesquiera A, B, C , si A precede a B y B precede a C , también A precede a C .

Del verificarse las condiciones α), β) para los elementos del conjunto u , resulta que es ordenado, en el sentido ordinario de la palabra (§ 4).

Se expresará esta circunstancia, diciendo, que se ha construido, un ordenamiento Ω_0 de origen O , concorde con el sentido σ .

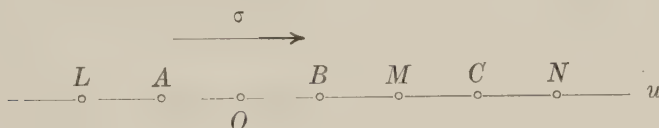
Dos ordenamientos distintos, Ω_1 , Ω_2 concordes con un mismo sentido σ , se dirá que son concordes entre sí. Podemos ahora demostrar el siguiente:

§ 6. TEOREMA. — Si tres elementos A, B, C , son tales que

$$v(ABC) = \sigma \quad [h]$$

en un ordenamiento Ω_0 , de origen O , concorde con σ , dichos elementos, se suceden en un orden (LMN) , que proviene de una permutación circular de (ABC) .

En efecto, en el ordenamiento Ω_0 sean L, M, N , tres elementos sucesivos, se tendrá:



$$v(OMN) = v(ONL) = \sigma$$

y de aquí, por la 3ª condición que define el ordenamiento circular sale:

$$v(MNL) = \sigma$$

y teniendo en cuenta (h) , sale finalmente:

$$v(ABC) = v(MNL).$$

Se deduce, que un ordenamiento Ω_{01} de origen O_1 , concorde con σ , es concorde con Ω_0 y finalmente si Ω_{02} , es un ordenamiento de origen O_2 , concorde con Ω_0 los ordenamientos Ω_{01} , Ω_{02} serán entre sí, concordes, pues de lo anterior se deduce, que si A, B, C son elementos sucesivos en Ω_0 serán sucesivos en Ω_{01} , Ω_{02} , o bien en el mismo orden, o bien según una permutación circular de la terna ordenada (ABC) y por ser:

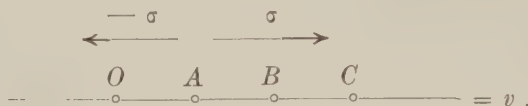
$$\sigma = v(ABC) = v(CAB) = v(BCA)$$

serán concordes Ω_{01} , Ω_{02} .

El conjunto de todos los ordenamientos, concordes con el ordenamiento prefijado, es tal, que entre dichos órdenes, existe una relación idéntica, recíproca y transitiva. Por abstracción de todos estos ordenamientos, mutuamente concordes nace el concepto de *sentido de una forma de 1ª especie*, concorde con todos los dichos ordenamientos.

§ 7. TEOREMA (recíproco del anterior). — *Un conjunto ordenado, es ordenable circularmente.*

Sea $u = A, B, C, \dots$ un conjunto ordenado y Ω_0 un ordenamiento de u .



Con los elementos de u , hagamos la siguiente clasificación: Incluyamos las ternas ordenadas en dos clases $\sigma, -\sigma$. Si en la terna ordenada (ABC) , los elementos se suceden en el mismo orden que en Ω_0 , o en un orden, deducido de una permutación circular de (ABC) , la incluimos en σ ; si esta circunstancia no se verifica, la incluimos en $-\sigma$. De esta repartición resulta: 1º) las clases σ y $-\sigma$, no tienen elementos comunes y si (ABC) está incluida en σ , no puede pertenecer a $-\sigma$, dado el criterio de la repartición, 2º) si la terna (ABC) pertenece a la clase σ , la terna (ACB) , pertenece a $-\sigma$, desde que si en el ordenamiento Ω_0 , los elementos (ABC) se suceden en el orden escrito, no podrán sucederse en Ω_0 , en el orden (ACB) .

Resulta que toda terna, cambia de clase, por la permutación de dos cualesquiera de sus elementos. Las clase σ y $-\sigma$, cumplen pues, las conniciones 1ª y 2ª que definen el ordenamiento circular. Se trata de probar ahora, que también se cumple la condición 3ª.

Sean A, B, C, D , cuatro elementos de u , tales que:

$$v(ABC) = v(ACD) = \sigma \quad [h]$$

sale de aquí, que los elementos A, B, C , deben sucederse en Ω_0 , en uno de los siguientes órdenes:

$$(ABC) \quad , \quad (CAB) \quad , \quad (BCA)$$

y los elementos de la terna ordenada (ACD) , en uno de los órdenes:

$$(ACD) \quad , \quad (DAC) \quad , \quad (CDA) .$$

Se tendrán todos los casos posibles de ordenación, asociando las ternas del primer grupo, con las del segundo de modo que A y C con-

serven el mismo orden, pues por $[h]$ A precede o sigue a C . De aquí resultan los grupos siguientes:

$$\left. \begin{matrix} ABC \\ ACD \end{matrix} \right\} [1] \quad \left. \begin{matrix} ABC \\ DAC \end{matrix} \right\} [2] \quad \left. \begin{matrix} BCA \\ CDA \end{matrix} \right\} [3] \quad \left. \begin{matrix} CAB \\ CDA \end{matrix} \right\} [4].$$

De la [1], debiendo A preceder a C y C a D , resulta la cuaterna ordenada $ABCD$. Análogamente de [2], [3] y [4], resultan las cuaternas ordenadas:

$$DABC - BCDA - CDAB.$$

Del verificarse, de uno cualquiera de los órdenes de dichas cuaternas, resulta que los elementos A, B, C, D , se suceden en Ω_0 , o bien en el orden escrito, o bien en un orden deducido circularmente de él, es decir será:

$$v(ABD) = \sigma \quad [\omega]$$

resultando pues, que del verificarse: $v(ABC) = v(ACD)$ debe verificarse la $[\omega]$ o en otros términos, se cumple la condición 3.ª, del ordenamiento circular. Como consecuencia inmediata de este teorema puede afirmarse: las condiciones 1.ª, 2.ª, 3.ª, que definen el ordenamiento circular, son compatibles.

§ 8. POSTULADO DE ORDENACIÓN. — Las consideraciones que preceden, nos muestran, que toda forma de 1.ª especie, es un conjunto ordenable circularmente. Pero por ello, no se infiere que deba excluirse la posibilidad de que el conjunto de los elementos de una forma se pueda ordenar en varios modos, no discordes entre sí, respecto de un mismo origen.

Poniendo de manifiesto, entre los distintos ordenamientos circulares eventualmente posibles, el ordenamiento que aparece como el más natural, puesto que está vinculado a la generación de la forma, por el movimiento de uno de sus elementos y haciendo resaltar su carácter proyectivo, la intuición nos dice, que existe una manera uniforme de definir los ordenamientos y por lo tanto los sentidos, para las formas de 1.ª especie, de modo que órdenes y sentidos definidos sobre una forma, se transformen en los órdenes y sentidos definidos análogamente, sobre toda forma perspectiva con ella. Tal ordenamiento, le llamaremos *ordenamiento circular natural de la forma*. Todo ello, lo resumimos, enunciando explícitamente, el postulado que sigue:

Postulado de ordenación. — En toda forma de primera especie, existe un ordenamiento *circular natural*, bien determinado, que tiene carácter *proyectivo*.

Si σ es uno de los sentidos de dicho ordenamiento y A, B , son dos elementos cualesquiera de la forma, existe al menos un elemento C de la forma, tal que $v(ABC) = \sigma$.

§ 9. — En virtud del postulado que antecede, dada una forma de 1ª especie, queda por eso mismo, dada en ella un ordenamiento circular natural, que satisfacen a las condiciones 1ª, 2ª y 3ª, y que tiene carácter proyectivo. En virtud de dicho ordenamiento, quedan definidos dos sentidos opuestos: σ y $-\sigma$.

Podemos ahora dar la siguiente:

Definición. — Si σ y $-\sigma$, son dos sentidos opuestos y A, B, C, D son cuatro elementos de u , diremos que el par (C, D) no separa al par (A, B) , si se verifica:

$$v(ABC) = v(ABD) = \sigma \quad [1]$$

diremos que el par (C, D) separa al par (A, B) , si se verifica:

$$v(ABC) = -v(ABD) = \sigma \quad [2]$$

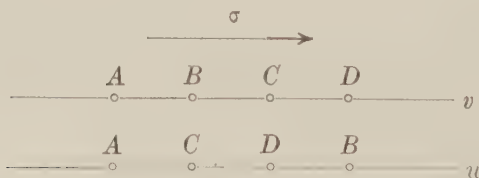
§ 10. TEOREMA. — Si el par (C, D) no separa al par (A, B) , el par (A, B) no separa al par (C, D) y reciprocamente.

En otros términos, si se verifica que:

$$v(ABC) = v(ABD) \quad [\alpha]$$

digo que debe verificarse:

$$v(CDA) = v(CDB) \quad [\beta]$$



En la hipótesis (α) , deberá cumplirse necesariamente una u otra de las dos igualdades:

$$1^{\text{a}} \quad v(ABC) = v(ACD)$$

ó

$$2^{\text{a}} \quad v(ABC) = v(ADC) .$$

Si se cumple la 1ª, por la condición 3ª (§ 2) se tiene:

$$v(ACD) = v(BCD)$$

y permutando en el primer miembro A con C y luego con D y en el segundo miembro B con C y luego con D sale finalmente:

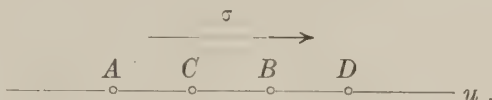
$$v(CDA) = v(CDB) \quad [\omega]$$

Se demostrará exactamente del mismo modo que si

$$v(ABC) = -v(ABD) \quad [\alpha']$$

es también:

$$v(CDA) = -v(CDB) \quad [\omega']$$



Así pues del verificarse $[\alpha]$, resulta $[\omega]$, del verificarse $[\alpha']$, resulta $[\omega']$ y recíprocamente.

Si en cambio valiese la 2ª de las condiciones, teniendo en cuenta la $[\alpha]$ es:

$$v(ADC) = v(ABD)$$

y por la condición 3ª (§ 2) sale:

$$v(ADC) = v(BDC) \quad \text{o} \quad v(CAD) = v(CBD)$$

y finalmente:

$$v(CDA) = v(CDB)$$

permutando D con A en el primer miembro y con B en el segundo.

Se tiene en consecuencia, que los pares (AB) , (CD) desempeñan una función simétrica.

Para indicar que los pares (AB) , (CD) , no se separan escribiremos:

$$AB || CD$$

y para indicar que se separan, se escribirá:

$$AB \# CD .$$

§ 11. — Del anterior teorema, se deducen algunas consecuencias inmediatas. Si A, B, C, D, E , son elementos de u se tiene:

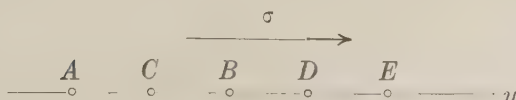
1º Si

$$AB \# CD$$

$$AB \# CE$$

debe ser:

$$AB || DE$$



En efecto, la hipótesis, se traduce en las siguientes igualdades:

$$v(ABC) = -v(ABD)$$

$$v(ABC) = -v(ABE)$$

∴

$$v(ABD) = v(ABE)$$

que es el enunciado de la tesis.

2° Si es:

$$AB \parallel CD$$

[h]

$$AB \parallel CE$$

es también:

$$AB \parallel CE$$

[t]

$$\begin{array}{ccccccc} A & B & C & E & D & & u \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \end{array}$$

En efecto, [h] puede escribirse:

$$v(ABC) = v(ABD) = v(ABE).$$

y estas igualdades contienen simultáneamente [h] y [t].

3° De:

$$AB \parallel CD$$

[h]

$$AB \neq CE$$

sale:

$$AB \neq DE$$

[t]

$$\begin{array}{ccccccc} A & E & B & C & D & & u \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & & \end{array}$$

puesto que [h] y [t] están contenidas en las igualdades:

$$v(ABC) = v(ABD) = -v(ABE).$$

§ 12. TEOREMA. — Si la cuaterna ordenada $(ABCD)$, pertenece a un sentido σ , lo pares (AC) y (BD) se separan y recíprocamente.

Decir que la cuaterna ordenada, pertenece al sentido σ , significa decir, que vale la relación:

$$v(ABC) = v(ACD) = \sigma \quad [1]$$

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \longrightarrow \\ \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & & & u \\ \circ & \circ & \circ & \circ & & & \end{array} \end{array}$$

que puede escribirse (por 2ª):

$$v(ACB) = -v(ACD) = -\sigma \quad [2]$$

y esta relación nos dice, que los pares AC , BD se separan. Recíprocamente, si se cumple la [2] se cumple la [1].

En la cuaterna ordenada $(ABCD)$, las ternas concordantes con la terna ordenada (ABC) , son las siguientes:

$$\sigma = v(ABC) = v(ACD) = v(ABD) = v(BCD)$$

en la hipótesis de que $AC \nparallel BD$. Comparando el 1er. término con el tercero, se tiene:

$$AB \parallel CD$$

comparando el primero con el cuarto sale:

$$AD \parallel BC.$$

Se tiene pues, en resumen: si A, B, C, D , son cuatro elementos de una forma u de primera especie, de las tres distribuciones:

$$(AB \mid CD) \quad , \quad (AC \mid BD) \quad , \quad (AD \mid BC) .$$

dos están formadas, por pares que no se separan, la restante, por pares que se separan.

Sea ahora, la énpula $(A_1 A_2 \dots A_n)$ ordenada y pertenezca a un sentido σ , se tendrá:

$$v(A_1 A_2 A_3) = v(A_1 A_3 A_4) = \dots = v(A_1 A_i A_{i+1}) = \dots = \\ = v(A_1 A_k A_{k+1}) = \dots = v(A_1 A_l A_{l+1}) = \dots = v(A_1 A_{n-1} A_n) .$$

De las cuales relaciones se deduce (condición § 2, 3ª):

$$v(A_1 A_i A_k) = v(A_1 A_k A_l) \quad [1] \quad (1 < i < k < l)$$

relación que nos dice que la cuaterna ordenada

$$(A_1 A_i A_k A_l)$$

pertenece al sentido de la énpula $(A_1 \dots A_n)$.

Resulta también de la [1]:

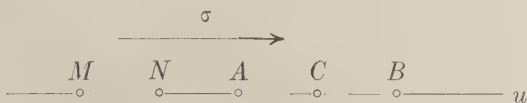
$$A_1 A_k \nparallel A_i A_l$$

y por tanto: (§ 12).

$$A_1 A_i \parallel A_k A_l$$

$$A_1 A_l \parallel A_i A_k .$$

§ 13. TEOREMA. — Si A, B, C, M, N , son cinco elementos de la forma u y los tres primeros, pertenecen a un mismo segmento proyectivo MN , la quintupla ordenada $(ABCMN)$ o una obtenida por permutación de los tres primeros elementos, está dotada de sentido.



Por pertenecer A, B, C , a un mismo segmento proyectivo, las ternas (MNA) , (MNB) , (MNC) , serán concordes y se podrá escribir:

$$v(MNA) = v(MNB) = v(MNC) = \sigma \quad [1]$$

Sea Ω_M el ordenamiento de origen M concorde con dichas ternas. En tal ordenamiento sale de [1], que N precede a A , B y C (§ 5) y es por tanto el primer elemento de la cuaterna $(NABC)$.

Entre los elementos A, B, C habrá uno que precede a los otros dos, si tal elemento es A , precederá a B y a C . Entre los elementos B y C , sea finalmente C por ejemplo, el primer elemento en el ordenamiento Ω , C precederá a B y en consecuencia, la quintupla $(MNACB)$, por satisfacer a la condición

$$v(MNA) = v(MAC) = v(MCB)$$

está dotada de un sentido.

§ 14. TEOREMA. — Si C y D pertenecen al mismo segmento AB , todo punto del segmento CD , que no contiene A ni B , pertenece al segmento AB , que contiene al segmento CD



Como entre los puntos del segmento CD , se influyen, los extremos C y D , será suficiente demostrar el teorema para todo punto P , del segmento CD , considerado en la hipótesis. Es decir habrá que probar que $v(APB) = v(ACB)$ o sea, el segmento AB que contiene a P , también contiene a C .

Por ser P interior al segmento CD , que no contiene A ni B , los pares AP y CD se separan, es decir:

$$AP \nmid CD \quad [1]$$

En la hipótesis [1] debe verificarse o bien:

$$AP \nmid CB \quad [2]$$

o bien:

$$AP \nmid DB \quad [3]$$

Si se verifica [2], teniendo en cuenta [1] sale:

$$v(APC) = -v(APD) \quad [4]$$

$$v(APC) = -v(APB)$$

∴

$$v(APD) = v(APB)$$

y esta última igualdad nos dice que:

$$AP \parallel DB$$

Si se verificase [3], se tendría:

$$-v(APD) = v(APB)$$

y comparando con [4] sale:

$$v(APC) = v(APB)$$

∴

$$AP || CB$$



Pero simultáneamente, no puede verificarse:

$$AP \nmid CB$$

$$AP \nmid DB$$

porque de estas condiciones se deduce que:

$$AP || CD$$

y ésto contradice a la [1]

Supongamos pues que se tenga:

$$AP \nmid CB$$

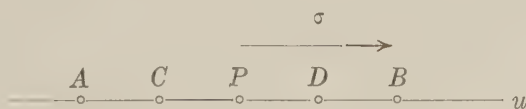
Entonces será:

$$v(APC) = -v(APB) = v(ABP) = v(ABC)$$

y de aquí: $v(APB) = v(ACB)$.

De esta última igualdad se deduce, que el sentido (APB) , es concorde con el sentido (ACB) , o en otros términos que P y C pertenecen al mismo segmento AB .

§ 15. TEOREMA. — Si a la hipótesis del teorema anterior, se agrega la suposición de que en el ordenamiento Ω_A , de origen A , concorde con el sentido $v(ACB) = \sigma$, C precede a D , si tiene que en dicho ordenamiento, C precede a P y P precede a D .



Siendo el ordenamiento Ω_A concorde con el sentido σ , y estando éste, definido por la terna ordenada (ACB) , es decir, siendo $v(ACB) = \sigma$, habrá que demostrar:

$$v(ACP) = v(APD) = \sigma$$

igualdad que expresa, que en el ordenamiento Ω_A concorde con σ , C precede a P y P precede a D .

Por ser P interior al segmento CD que no contiene a A , resulta:

$$AP \# CD \quad [1]$$

y por hipótesis es:

$$v(ACB) = \sigma \quad [2]$$

La [1] puede escribirse (recordando la condición 3ª del ord. circular) (§ 2).

$$v(APC) = -v(APD) = v(ADP) = v(ADC) \quad [3]$$

La condición de que en Ω_A , C precede a D se escribe:

$$v(ACD) = \sigma.$$

Comparando esta igualdad con [3] sale:

$$v(APC) = -v(APD) = -\sigma$$

o lo que es lo mismo:

$$v(ACP) = v(APD) = \sigma$$

resultando que coincide con la hipótesis.

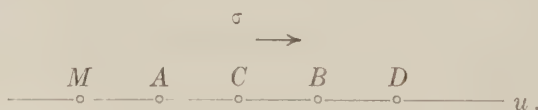
§ 16. TEOREMA. — Si M, A, B, C, D , son cinco elementos de la forma u , que satisfacen a las condiciones:

a) En uno de los ordenamientos Ω_M de origen M , A precede a B y C precede a D .

b) C es interior al segmento AB , que no contiene a M ,

c) AB y CD se separan

se tiene que en el ordenamiento Ω_M , A precede a C , C precede a B y B precede a D .



Si el ordenamiento Ω_M es concorde con el sentido σ , habrá que demostrar:

$$v(MAC) = v(MCB) = v(MBD) = \sigma$$

igualdades que expresan, que en Ω_M , A precede a C , C a B y B a D .

Las condiciones a), b), c) pueden traducirse en las igualdades:

$$a_1) \quad v(MAB) = v(MCD) = \sigma \quad [1]$$

$$b_1) \quad MC \# AB \quad \therefore \quad v(MCA) = -v(MCB) \quad [2]$$

$$c_1) \quad AB \# CD \quad \therefore \quad v(ABC) = -v(ABD) \quad [3]$$

De la [2], (recordando además la 3ª condición de los ordenamientos circulares (§ 2) y la [1] sale:

$$v(MAC) = v(MCB) = v(MAB) = \sigma \quad [4]$$

y estas igualdades, nos dicen, que en el ordenamiento Ω_M , A prece a C y C predece a B .

De [1] y [4] sale:

$$v(MCD) = v(MAC) = -v(MCA)$$

y de esta igualdad resulta:

$$MC \# AD$$

y del verificarse esta condición (por un teorema anterior) sale:

$$MA \parallel CD$$

y como por c_1)

$$AB \parallel CD$$

de estas dos últimas condiciones resulta:

$$MB \# CD$$

o lo que es lo mismo:

$$v(MBD) = -v(MBC) = v(MCB) = \sigma$$

que nos dice que B precede a D en Ω_M .

17 — CORRESPONDENCIAS ORDENADAS — Una correspondencia biunívoca π , entre dos formas de 1ª especie, se dice que es ordenada, cuando hace corresponder a dos ternas ordenadas (ABC) , (PQR) concordes o discordes de la forma u , dos ternas $(A'B'C')$, $(P'Q'R')$ de la forma u' , respectivamente concordes o discordes.

Por lo tanto, si la correspondencia, es ordenada y se verifica:

$$v(ABC) = \pm v(PQR)$$

debe verificarse:

$$v(A'B'C') = \pm v(P'Q'R') .$$

Resulta que si siendo π una correspondencia ordenada, a la cuaterna $ABCD$, hace co corresponder la cuaterna $A'B'C'D'$ del verificarse:

$$v(ABC) = \pm v(ABD)$$

resulta que debe ser:

$$v(A'B'C') = \pm v(A'B'D')$$

o lo que es lo mismo, si es:

$$AB \parallel CD$$

debe ser:

$$A'B' \parallel C'D'$$

y si es:

$$AB \nparallel CD$$

debe ser:

$$A'B' \nparallel C'D'$$

luego si los pares (AB) y (CD) se separan (o no) resulta que $(A'B')$, $(C'D')$ se separan (o no), luego una correspondencia ordenada, hace corresponder a elementos que se (no) separan, elementos que se (no) sepáran.

Este resultado puede invertirse como sigue:

Una correspondencia π , biunívoca, entre dos formas de 1ª especie, que respete la separación de los elementos, es ordenada.

En la hipótesis que la correspondencia π , conserve la separación de los elementos, consideremos dos casos:

1º) Las ternas (ABC) , (ABD) , tienen dos elementos comunes, se tiene:

si

$$AB \parallel CD \quad a) \quad \text{es} \quad v(ABC) = v(ABD) \quad (a_1)$$

si

$$AB \nparallel CD \quad b) \quad \text{es} \quad v(ABC) = -v(ABD) \quad (b_1)$$

y como por hipótesis, π conserva, la separación de los elementos, la cuaterna $A'B'C'D'$ correspondiente de la $ABCD$ en π , será tal que:

$$A'B' \parallel C'D' \quad (a')$$

en la hipótesis $a)$. y

$$A'B' \nparallel C'D' \quad (b')$$

en la hipótesis $b)$. Pero $a')$, $b')$ pueden también escribirse:

$$v(A'B'C') = v(A'B'D') \quad (a'_1)$$

$$v(A'B'C') = -v(A'B'D') \quad (b'_1)$$

luego al verificarse de (a_1) , (b_1) , corresponde ordenadamente, el verificarse de (a'_1) , (b'_1) , o sea, la correspondencia es ordenada.

2º) Si las ternas (ABC) , (PQR) , no tienen elementos comunes, sean $(A'B'C')$, $(P'Q'R')$ las ternas respectivamente homólogas.

Si consideramos las ternas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (ABC) \\ (PBC) \end{array} \right\}$$

por tener dos elementos comunes, del verificarse:

$$\begin{aligned} \text{sale:} \quad & v(ABC) = \pm v(PBC) \\ & v(A'B'C') = \pm v(P'B'C') \end{aligned} \quad [1]$$

Si consideramos las ternas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (PBC) \\ (PQC) \end{array} \right\}$$

si es:

$$\begin{aligned} \text{sale:} \quad & v(PBC) = \pm v(PQC) \\ & v(P'B'C') = \pm v(P'Q'C') \end{aligned} \quad [2]$$

Considerando finalmente las ternas:

$$\left\{ \begin{array}{l} (PQC) \\ (PQR) \end{array} \right\}$$

si es:

$$\begin{aligned} \text{es:} \quad & v(PQC) = \pm v(PQR) \\ & v(P'Q'C') = \pm v(P'Q'R') \end{aligned} \quad [3]$$

De [1], [2], [3] sale, que del verificarse:

$$v(ABC) = v(PBC) = v(PQC) = v(PQR)$$

debe verificarse también:

$$v(A'B'C') = v(P'B'C') = v(Q'P'C') = v(P'Q'R')$$

luego, si las ternas (ABC) , (PQR) , son concordes o discordes, lo serán respectivamente en igual modo, las ternas homólogas: $(A'B'C')$, $(P'Q'R')$, en la correspondencia π .

BIBLIOGRAFIA

- COMESSATTI, ANNIBALE. *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*. Editor: «Editrice CEDAM». Tom. Iº. Padova: 1930. Tom. IIº Padova: 1931.
- PASCH, E. MORRITZ. *Lecciones de Geometría Moderna*. Traducción por J. G. Alvarez Ude y J. Rey Pastor. Editor: Junta para Ampliación de Estudios, Madrid 1913.
- SEVERI, FRANCISCO. *Geometria Proiettiva*. Editor «La Litotipo» Padova: 1921.

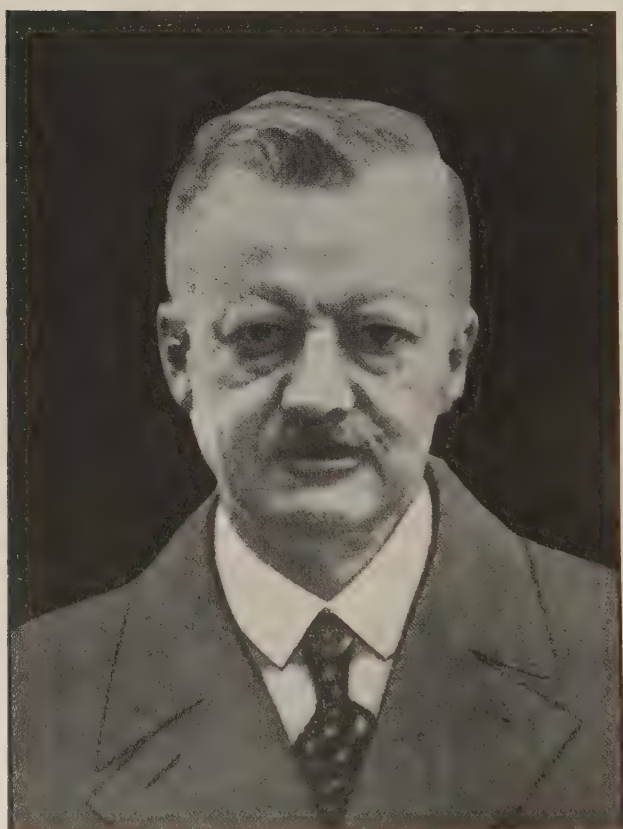
PROFESOR DR. HANS SPEMANN

PREMIO NOBEL 1935

BIOGRAFIA Y BREVE RESEÑA DE SU OBRA POR

ALEJANDRO VON DER BECKE

Profesor adjunto de Zoología Especial y Anatomía Comparada
de la Facultad de Ciencias Médicas de Buenos Aires



El premio Nobel de Ciencias, (Fisiología y Medicina) correspondiente al año 1935, fué otorgado al eminente zoólogo alemán, Prof. Hans Spemann, Director del Instituto de Zoología de la Universidad de Freiberg i. Br.

Pocas veces ha sido tan unánime el asentimiento con que el mundo científico recibiera tal distinción, circunstancia que sólo es posible explicar por el reconocimiento de la trascendental obra realizada por Spemann en el dominio de la Ontogenia. Sus descubrimientos pueden considerarse geniales y extraordinarios sus resultados. En la plenitud de su vida, pues actualmente cuenta 67 años, cabe a Spemann la satisfacción de ver justicieramente apreciados sus largos años de innumerables sacrificios y trabajos, entre los cuales se destaca una obra —el hallazgo del «efecto organizador»— que por su grandiosidad, es el punto de partida de orientaciones que brindan nuevas perspectivas a las especulaciones filosóficas.

Spemann se formó al lado del ilustre zoólogo Boveri, que tanta fama adquiriera por sus investigaciones relacionadas con la división y la primera segmentación del «*Ascaris megalocephala*». Obtuvo su título en Würzburg, en el año 1895, presentando una tesis sobre el tema: «Desarrollo del *Strongylus paradoxus*», que fué publicado en los Anuarios de Zoología, Sección Anatomía, Tomo 8 (Zoologische Jahrbücher, Abt. für Anat., Band 8). En 1908, fué nombrado Profesor en Rostock; en 1914, se le concedió el cargo de Subdirector del «Kaiser Wilhelm Institut für Biologie», en Berlín - Dahlem; desde 1919 hasta hoy, dicta la cátedra de Zoología en la Universidad de Freiburg. Su tesis para optar al Doctorado no presentaba nada nuevo, en lo que se refiere a su contenido científico propiamente dicho, y tampoco en lo concerniente al método empleado, pero se relacionaba estrechamente con las investigaciones de su maestro Boveri. El mismo Spemann dice en su trabajo: «Se observará fácilmente, que estas investigaciones están íntimamente relacionadas, en todos sus detalles y hasta en los pormenores técnicos, con el trabajo de Boveri» (página 319).

En el año 1898 siguió a la tesis la publicación de un trabajo: «Sobre el desarrollo inicial de la Trompa de Eustaquio y del esqueleto de la cabeza en la Rana temporaria», que se dió a conocer en la misma Revista, tomo 11.

Todos los trabajos posteriores de Spemann se relacionan exclusivamente con el desarrollo inicial de los huevos de anfibios, pudiendo observarse en todos ellos que el autor no se propone efectuar una descripción de los procesos del desarrollo normal, sino que asigna una importancia mayor al análisis causal de estos mismos procesos. La experimentación es el método empleado por Spemann para analizar los problemas, que se propone resolver, y es en este terreno

que llevó al máximo de perfección dos métodos de investigación básicos:

- a) el método de crear defectos, es decir de anular por destrucción ciertas partes del germen;
- b) el método de la trasplantación, que consiste en llevar ciertas zonas del germen, desde su ubicación primitiva a otro lugar del mismo o de otro germen.

Crea con este propósito una serie de recursos técnicos y de procedimientos muy elegantes, que ha descrito sintéticamente en su exposición «Técnica operatoria microquirúrgica», publicada en el «Manual de Abderhalden sobre métodos de investigación en Biología», Sección V, Parte 3ª. En ella trata principalmente el empleo de agujas de vidrio de todas las formas deseadas colocadas en el microcauterizador para efectuar las operaciones, refiriéndose, asimismo, a los lazos de cabello de niño, que se sujetan con cera a tubos capilares de vidrio y que sirven para sostener y transportar los embriones. Además, se describe el empleo de cubetas de vidrio con fondo de cera y depresiones apropiadas para el cultivo y las operaciones, efectuando la trasplantación de zonas germinativas delimitadas con ayuda de micropipetas de construcción adecuada. Gracias a este procedimiento, empleado para trasplantar ciertas partes de un germen de una determinada especie a gérmenes de otra especie pudieron diferenciarse, aún después de un prolongado desarrollo, los productos del material germinal de los de material trasplantado.

Todo el método de Spemann se caracteriza por su sencillez, realmente genial, aún cuando la realización práctica de los experimentos resulte bastante compleja, exigiendo una dosis considerable de habilidad y de paciencia por parte de quien los ejecuta.

Los propósitos que persigue Spemann en sus experimentos fueron compendiados por Mangold, su discípulo predilecto, actualmente catedrático de Zoología en Erlangen, en la siguiente forma:

1º — La interpretación de los movimientos de la materia en el germen, o sea, la cinemática, si aplicamos el término de Roux.

2º — La obtención de las «potencias prospectivas» en las zonas germinales en las distintas fases del desarrollo. O bien, expresado en otras palabras: ¿Qué posibilidades de desarrollo existen en una determinada zona germinal, dentro de una fase del desarrollo también determinada? O también: ¿Qué puede resultar aún de la zona germinal? ¿Qué órganos y tejidos puede formar?

3º — La obtención de la «Significación prospectiva». En otros

términos: ¿Qué resulta, efectivamente, en el proceso del desarrollo normal de una determinada parte del germen?

4º — ¿Cuál es la relación que existe entre las distintas zonas germinales en el huevo, segmentado o no, y cómo se influyen recíprocamente?

De la labor experimental de Spemann se destacan, principalmente, los ensayos sobre estrangulación, iniciados en 1900 y proseguidos hasta hoy, con huevos y gérmenes de Triton. Al lado de esos ensayos —y de no menor importancia que ellos en la enunciación de conceptos generales y puntos de vista— merecen citarse sus estudios sobre el análisis del desarrollo del ojo de los vertebrados.

Spemann realiza en sus ensayos la estrangulación de los gérmenes de «Triton taeniatus» en todas sus fases: en la de 2 células, en la de blástula, de gástrula y en la de neúrla (primera forma del sistema nervioso en el embrión), valiéndose de un cabello delgado. Los embriones fueron estrangulados parcial o totalmente, de modo que, en última instancia, se produjeron dos mitades de germen. ¿Qué resultó después de estas mitades?

Si la estrangulación se efectuó *antes de la gastrulación*, se desarrolló:

- a) un embrión completamente normal de la mitad del tamaño y una formación esférica, a la que faltaba la musculatura, la cuerda dorsal y el sistema nervioso central.
- b) dos embriones completamente normales, aún cuando ello ocurrió ciertamente con menos frecuencia, que tenían la mitad del tamaño de los embriones originados de huevos no estrangulados.

De ello resulta que: Si se estrangula un germen *antes* de la gastrulación, es decir, en fase temprana, a lo largo del plano medio, se forma de cada mitad un embrión normal; es evidente, pues, que tanto la mitad izquierda como la derecha de un germen semejante poseen, también en la fase temprana, todas las potencias que se requieren para la formación de un embrión completo. En a), se originan dos mitades, de las cuales una, la dorsal sigue conservando aún todas las potencias, mientras que la otra, la ventral, ya tiene potencias prospectivas limitadas: ya no se origina de ella un embrión completo, sino solamente una parte ventral (sin sistema nervioso central, cuerda dorsal y musculatura). Una estrangulación parcial —no total— produjo, cuando se efectuó en sentido frontal, un embrión completo con una parte ventral anexa; cuando la estrangula-

ción se efectuó en sentido transversal, resultó un embrión con 2 cabezas.

Los embriones dobles y las formaciones de cabezas gemelas demostraron, que el germen posee ya, antes de la gastrulación, una elevada capacidad regenerativa, es decir, que las potencias prospectivas de las distintas secciones del germen, continúan siendo, parcialmente, muy grandes; y que la materia germinal todavía no está «determinada», es decir, que no está definitivamente fijada.

En cambio, cuando Spemann realizó estrangulaciones en embriones *después de la gastrulación*, desapareció en ellos la capacidad de regeneración de las partes faltantes. Spemann dedujo de ello que en el instante de la gastrulación se produce la diferenciación característica de la materia germinal, y que las potencias prospectivas se reducen considerablemente en la gastrulación.

En los trabajos siguientes (1916 - 1918 - 1921) Spemann trata de estudiar más profundamente la naturaleza de la diferenciación y el momento en que se realiza. Para ello empezó por determinar las potencias prospectivas, que se encuentran en las distintas zonas germinales, teniendo en cuenta que su disminución es la que expresa la naturaleza de la diferenciación.

Metódicamente, Spemann trata de resolver este problema por transplatación de pequeños trozos de gástrula temprana (joven o reciente). Las distintas zonas son cortadas y extraídas, injertándolas en otros lugares del embrión: por ejemplo, se transplanta en el mesodermo una parte del presunto ectodermo (es decir, una parte del germen, que, en el caso de haberse desarrollado normalmente, se hubiese transformado en ectodermo). En esta forma se observa que dicho trozo de presunto ectodermo de la gástrula joven, se convierte en mesodermo, cumpliéndose su desarrollo completamente identificado con éste, sin conservar las características primitivas, es decir, que el desarrollo se efectúa en base al lugar en que se injerta el trozo del ectodermo y no de acuerdo a su origen: se convierte en mesodermo. Las potencias prospectivas de este ectodermo de la gástrula joven, son, pues, muy grandes, pueden formarse de él la epidermis, el sistema nervioso central, el pronefros, la musculatura, etc. El presunto mesodermo y la futura cuerda dorsal, en cambio, siempre se desarrollan de acuerdo a su origen. Pero el significado de estos trozos de tejido primitivo es más amplio; influyen las zonas germinales vecinas y provocan su desarrollo. En ellos se origina el impulso que decidirá la formación de la cuerda dorsal, del

pronefros, placa medular de los ojos, de los órganos auditivos, de la pared del intestino, etc. Se dice, por ende, que este presunto mesodermo induce a los citados órganos. Vemos, pues, que la zona marginal-dorsal de la gástrula es la que provoca los procesos de diferenciación, que se cumplen en su periferia. Observaciones semejantes ya las había hecho Spemann, al estudiar el desarrollo del ojo: la cavidad ocular es la que impulsa (induce) la formación del lente. Spemann ha dado el nombre de «organizadoras» a las zonas, que son responsables de la formación de órganos en su área de influencia, es decir, que inducen a determinados órganos. En este sentido, distingue zonas organizadoras de primera categoría (labio superior de la boca primitiva), de segunda, tercera y cuarta categoría. A esta última pertenece la cavidad ocular, que induce al lente (Spemann, 1924). A su vez por los efectos de la inducción, clasifica a las zonas citadas en: «organizadoras homogenéticas» cuando provocan por inducción la formación de otro órgano semejante; y en «organizadoras heterogenéticas», cuando el inductor impulsa la formación de un órgano distinto (la cavidad ocular induce la formación de un lente).

Con el propósito de estudiar la *naturaleza de las zonas organizadas*, Spemann, y sobre todo sus discípulos, realizaron una larga serie de investigaciones, de gran valor e interés científico.

Se trató de resolver asimismo el problema que se refiere al mecanismo de esta facultad de las «zonas organizadoras», a cuyo efecto se realizó un experimento muy importante: las zonas, cuyo efecto organizador se desea estudiar, se trasplantan de su ubicación primitiva, llevándolas a la cavidad de segmentación (es decir, entre el ectodermo y el endodermo) de la gástrula joven de «Triton taeniatus». Al proseguir el desarrollo de los gérmenes, el producto de la transplatación llega, finalmente, a la región cardíaca, limitando allí con el ectodermo y el endodermo. La ventaja de este método sencillo, consiste, ante todo, en que el material puede ser estudiado, en lo referente a su capacidad de inducción, sin que puedan producirse soldaduras con los tejidos del receptor (Spemann, 1931. a.). Cuando se presenta un efecto de inducción, se observa en el germen receptor (al que fué transplantedo el material a estudiar) una lámina medular en el lugar debajo del cual se encuentra el producto transplantedo. Con este método se lograron los siguientes resultados, en los que intervinieron principalmente —además de Spemann— sus numerosos discípulos (citados según Mangold, 1929):

1. — Existe una relación estrecha entre la extensión de la zona

con capacidad organizadora, dentro de la gástrula joven y la de la formación que dará origen a la cuerda dorsal y la vértebra primitiva; (Bautzmann, 1926).

2. — La capacidad de inducción se conserva dentro de la cuerda dorsal hasta la fase del brote caudal (1928).

3. — La parte superior del celoma (Urdarmdach) y sus órganos, siguen influenciando al tubo neural, aún después de la neurulación (Lehmann, 1926 - 28).

4. — La zona organizadora ejerce su influencia principalmente, sirviendo de asiento básico, como parte superior del celoma, a la presunta lámina medular (Marx, 1925; Geinitz, 1925).

5. — El factor de inducción de la zona organizadora, no es de naturaleza específica en cada tipo; en el «Triton taeniatus» se observa que son eficaces las zonas organizadoras de las distintas Urodels y Anuros (Geinitz, 1925).

6. — El factor de inducción de la zona organizadora no es, tampoco, exclusivo para un órgano específico, ya que, fuera de la parte superior del celoma, también puede inducir la lámina medular. (Mangold y Spemann, 1927).

7. — La capacidad de inducción puede ser adquirida por la presunta epidermis, por medio de transplantación en el labio superior de la boca primitiva (Spemann y Geinitz, 1927), y la presunta placa medular (Mangold y Spemann, 1927).

8. — La zona organizadora determina, junto con el germen receptor, la dirección de la lámina inducida dentro del germen receptor (Spemann, 1927).

9. — Las zonas cefálicas de la parte superior del celoma, que se aplastan al iniciarse la gastrulación, *inducen* los órganos de la cabeza (zona organizadora de la cabeza), mientras que las partes caudales, que se aplastan posteriormente, inducen a los órganos del tronco (zona organizadora del tronco) (Spemann, 1927 - 1929).

10. — El factor de inducción no solamente actúa como productor, sino que determina también *la naturaleza* del fenómeno.

Este factor de inducción debe ser, probablemente, una sustancia química, acerca de cuya naturaleza exacta se han expuesto numerosas hipótesis, sin que haya sido posible establecer nada realmente concreto.

Otro problema importante a cuya solución se abocó Spemann ya en el año 1901, reside en el estudio del desarrollo del ojo de los vertebrados. Este tiene su origen en:

1. — Una proyección vesicular del sistema nervioso central (vesícula ocular primaria), que se hunde, convirtiéndose en la cavidad ocular.

2. — Un espesamiento de la epidermis, que se convierte también en una vesícula, separándose en seguida de la epidermis, para adquirir forma esférica y transformarse en un lente. (Los pormenores de este desarrollo podrán estudiarse en los tratados respectivos).

Mediante la aplicación de sus métodos, consistentes en la destrucción de determinadas partes y transplantaciones, Spemann logró demostrar que la cavidad ocular es la que induce la formación del lente. Este se desarrolla, pues, en relación con la cavidad ocular. Pero la cavidad ocular induce también la formación de un lente a cualquier trozo de epidermis de la cabeza o del vientre: si se transplanta al lugar que ocupa la epidermis normal sobre la cavidad ocular cualquier trozo de epidermis, que, por ejemplo, procede del vientre, se forma en él, bajo la influencia de la cavidad ocular, un lente. En cambio, sin la cavidad ocular, jamás puede formarse un lente. Estas condiciones, empero, difieren un poco en los distintos tipos de anfibios. Los hechos descritos, se refieren a la «Rana fusca». En la «Rana esculenta», la formación normal del lente, da origen al desarrollo de éste, también sin asiento básico, por medio de una cavidad ocular. En cambio ninguna otra zona de la epidermis está capacitada para la formación del lente. El «Bombinator pachypus», está situado, en lo que atañe al desarrollo del ojo, entre la Rana fusca y la esculenta: la epidermis de la cabeza puede formar lentes, cuando existe el inductor (vesícula ocular); no así la del vientre.

El tamaño del lente depende —en los casos de diferenciación relativa (Rana fusca, Bombinator pachypus)— del tamaño de la cavidad inductora: el lente se desarrolla, pues, siempre en consonancia con el resto de la formación del ojo. En cambio, en la Rana esculenta no puede comprobarse una armonía semejante: el desarrollo del lente se basa en una «autodiferenciación».

Otro efecto, que tiene su origen en la cavidad ocular, es la transparencia de la córnea, que se forma de la epidermis que cubre el lente.

Por su parte, el lente parece no ejercer ninguna influencia sobre la vesícula ocular —según Spemann— o, por lo menos, no produce en ningún caso la adaptación de la vesícula ocular a la cavidad ocular.

Los numerosos discípulos de Spemann han proseguido eficiente-

mente los estudios acerca del desarrollo y la diferenciación del ojo de los vertebrados, dando a conocer en fechas recientes nuevos resultados sorprendentes.

Otro problema cuya solución buscó Spemann en sus experimentos desde hace mucho tiempo, fué el siguiente: ¿De qué factores depende la *asimetría* bilateral de los organismos?

Es sabido que los vertebrados, que en numerosos órganos ofrecen una construcción de severa simetría bilateral, muestran en otros, notables ejemplos de asimetría: especialmente ocurre así en el corazón y en el tubo intestinal, incluso órganos anexos (hígado, páncreas), que constituyen una excepción a la bilateralidad general. En efecto, vemos que su construcción no es simétrica y que no están situados en la línea media, ni simétricamente a ella. El intestino, y en particular, el ansa duodenal, posee una dirección característica en su doblez. Estas asimetrías han sido claramente establecidas. Ocasionalmente se encuentran desviaciones —especialmente en la ubicación— respecto de la asimetría normal. Cuando los órganos están situados, como la imagen reflejada por un espejo, es decir en posición inversa respecto a su ubicación normal, se habla de un «*Situs inversus*», (*viscerum seu cordis*).

Este «*Situs inversus*» se halló con mucha frecuencia en los embriones que se habían originado de estrangulaciones meridianas de gérmenes. Se observa, sin embargo, que el embrión originado de la mitad izquierda del germen, siempre se desarrolla normalmente, es decir, que el corazón y el tubo intestinal ocupan su lugar normal. El embrión que tuvo su origen en la mitad derecha del germen muestra, en cambio, con frecuencia un «*Situs inversus*», y lo cierto es que este fenómeno puede observarse casi en el 50 % de los embriones. Hasta en las larvas bicéfalas, obtenidas por estrangulación profunda, aunque no completa, efectuada en sentido meridiano, pudo observarse en todos los casos que la cabeza izquierda y la parte anterior del cuerpo siempre mostraban un desarrollo normal, mientras que la parte derecha revelaba frecuentemente un caso de «*Situs inversus*».

Para explicar este interesante fenómeno, Spemann enunció la hipótesis, de que la asimetría se basaba en una estructura íntima, que ya estaba dispuesta asimétricamente en los primeros tiempos del desarrollo del germen. Hasta llegó a formular en este sentido la hipótesis, de que esta estructura íntima era visible en una estructura molecular asimétrica. Pero los ensayos efectuados por Man-

gold, en 1921, y Hämmerling, en 1927, destinados a demostrar esta hipótesis, no tuvieron éxito.

Spemann formuló, además, una segunda hipótesis, destinada a explicar el fenómeno de la inversión en los embriones situados a la derecha del plano de estrangulación. Declaró que, por medio de la estrangulación, se lesionan formaciones de futuros órganos de ambos embriones, es decir, que se crean defectos que en algunos casos pueden referirse también a las formaciones del corazón y del intestino. Si ello ocurre, estos defectos originan, en los embriones situados a la izquierda del plano de estrangulación, un aumento de la tendencia normal de rotación del corazón y del intestino; en cambio, en los embriones situados a la derecha de dicho plano de estrangulación, el defecto creado provoca una rotación inversa de la formación primitiva de corazón e intestino, con relación a la dirección de rotación normal, y como consecuencia de ello, el sistema visceral entra a ocupar también una ubicación inversa. En apoyo de esta segunda hipótesis de Spemann, pueden citarse numerosos argumentos.

La situación asimétrica del corazón depende, evidentemente, de la del tubo intestinal, como pudo demostrarlo Spemann, en 1906, con el siguiente ensayo: Extrajo en la néurula el tercio medio de la lámina medular conjuntamente con su asiento básico, la parte superior del celoma, y volvió a colocarlo en su lugar, en posición inversa, de modo que se intercambiaron las partes, anterior y posterior, derecha e izquierda. Con este procedimiento no se afecta la formación del corazón, debido a que está situado fuera de la zona invertida. Sin embargo, se observa en las larvas un caso completo de Situs inversus, que también afecta al corazón: el corazón debe haber sido, pues, influenciado también en su asimetría por el canal intestinal.

Otro problema, a cuya solución se abocó Spemann, alentado por sus ensayos de estrangulación, fué el siguiente: ¿Son iguales entre sí o distintos los productos de la división del núcleo del óvulo fecundado? (Problema de la división nuclear desigual, en cuanto a caracteres hereditarios). Estranguló el óvulo en una fase tan temprana, que los espermatozoides, aunque ya penetraron en él, todavía no se unieron con el núcleo del óvulo. Al hacerlo, tuvo buen cuidado de que el núcleo del óvulo y del espermatozoide estuvieran en una misma mitad del óvulo estrangulado, para que pudiese realizarse la cariogamia. La otra mitad del óvulo estaba, al principio, desprovisto de núcleo. Sin embargo, al iniciarse la división del nú-

cleo, era posible que en la fase 4, 8 o 16 de la misma, uno de los núcleos emigrase a la mitad del óvulo, que hasta entonces no había tenido núcleo. Si el óvulo se estrangulaba entonces totalmente, una vez que poseía una porción de núcleo, se formaba (siempre que la estrangulación se efectuase en sentido meridiano), un embrión completamente normal, aún cuando el núcleo fuese solamente de $1/4$, $1/8$ ó $1/16$ del tamaño normal. Ello hace suponer que las 4 primeras divisiones del núcleo contienen el mismo material, en lo que a caracteres hereditarios se refiere, y los núcleos que se forman no pueden ser distintos entre sí. Si la estrangulación se realiza en sentido frontal, la situación es ligeramente distinta: es verdad que en este caso, $1/8$ del núcleo puede formar aún embriones normales; pero $1/16$ parte del núcleo ya no está en condiciones de hacerlo.

Si el óvulo es fecundado por varios espermatozoides, es posible lograr, por medio de una estrangulación efectuada a tiempo, que una de las mitades contenga al núcleo del óvulo y un núcleo de espermatozoide, fecundándose; y que la otra mitad contenga solamente un núcleo de espermatozoide. En este caso, las dos mitades se desarrollan, haciéndolo ambas en forma normal, a pesar de que una de ellas es diploide, teniendo su origen en un núcleo fecundado; la otra, en cambio, es aploide, y contiene solamente núcleos compuestos por material de cromosomas paternos.

También se obtuvo éxito en un ensayo efectuado, para fecundar óvulos con espermatozoides extraños. (Es decir, se logró realizar la fecundación de óvulos de «Triton taeniatus» con espermatozoides de «Triton cristatus» y viceversa). En este caso se obtuvieron, asimismo, fecundaciones múltiples, en las que varios espermatozoides penetraron en un óvulo. Enseguida se repitió en esos gérmenes el experimento relatado en el párrafo anterior, observándose que la mitad del óvulo diploide, fecundaba y producía en este caso un bastardo. La mitad aploide del óvulo, en cambio, estaba constituido por protoplasma de un tipo y núcleos de otro. Ella forma lo que se llama Merógono el que, sin embargo, no se desarrolla mucho, y, sobre todo, no crece lo suficiente como para poder observar su comportamiento en cuanto a los caracteres hereditarios. A pesar de ello, Hadorf logró recientemente obtener resultados muy interesantes en experimentos notables, que permiten hallar una explicación aclaratoria de los problemas cuya solución se procura. (Ver en este sentido, los trabajos y conferencias publicadas en 1936 por la Sociedad Zoológica Alemana de Freiburg).

Todos los trabajos de Spemann se caracterizan tanto por la expo-

sición extraordinariamente clara y concisa de sus puntos de vista, como por las sorprendentes experiencias que ofrecen.

Spemann no ha publicado jamás sus trabajos en una obra de gran volumen que reuniera todas las experiencias realizadas. Por lo demás, sólo en muy contadas ocasiones se ha ocupado en sus estudios de otros problemas y temas, que los anteriormente enunciados. Todos sus estudios (con excepción de sus dos primeros trabajos) se refieren a gérmenes de anfibios. Jamás abandonó ese tema, abocándose constantemente a la solución de nuevos problemas.

En la actualidad Spemann es la primera figura de la Zoología alemana. En el congreso de la especialidad realizado a mediados de 1936, en Freiburg i. Breisgan, los trabajos de su escuela constituyeron las notas más destacadas.

A continuación, se da una lista en castellano de los estudios publicados en alemán por Hans Spemann, hecha por su discípulo H. Bautzmann y que éste diera a conocer en el número extraordinario editado con motivo del 60º aniversario de aquél, por el «Roux's Archiv für Entwicklungsmechanik», Tomo 118.

- 1895 - *Desarrollo del Strongylus paradoxus.*
- 1898 - *Sobre el primer desarrollo de la trompa de Eustaquio y del esqueleto de la cabeza de Rana temporaria.*
- 1900 - *Producción experimental de embriones bicéfalos.*
- 1901 a- *Sobre correlaciones en el desarrollo del ojo.*
- 1901 b- *Algunos experimentos sobre correlaciones en el desarrollo del ojo.*
- 1901 c- *Estudios fisiológicos sobre el desarrollo del huevo de Tritón.*
- 1901 d- *Formaciones gemelas producidas experimentalmente.*
- 1902 - *Estudios fisiológicos sobre el desarrollo del huevo de Tritón.*
- 1903 a- *Estudios fisiológicos sobre el desarrollo del huevo de Tritón.*
- 1903 b- *Sobre la formación del lente en vesículas oculares defectuosas.*
- 1904 a- *Sobre nuevos estudios del lente.*
- 1904 b- *Sobre formaciones gemelas logradas experimentalmente con defecto ciclópico.*
- 1905 - *Sobre la formación del lente después de haber separado experimentalmente las células primarias de formación del lente.*
- 1906 a- *Sobre un nuevo método de las transplantaciones embrionales.*
- 1906 b- *Sobre transplantación embrional.*
- 1906 c- *Sobre ensayos de transplantación en embriones de anfibios.*
- 1907 a- *El problema de la correlación en el desarrollo animal.*
- 1907 b- *Nuevas conclusiones en el problema de los lentes.*
- 1907 c- *La estación zoológica de Nápoles.*
- 1908 - *Nuevos ensayos sobre el desarrollo del ojo de los vertebrados.*
- 1910 - *La transformación del canalículo auditivo invertido en laberinto. Una contribución crítica al estudio de la estructura de los órganos auditivos.*
- 1912 a- *Desarrollo del ojo de los vertebrados.*
- 1912 b- *Desarrollo de secciones de cerebro invertidas en embriones de anfibios.*

- 1914 - *Sobre provisión retardada de núcleos a porciones del germen.*
- 1915 - *Historia y crítica del concepto de la homología.*
- 1916 a- *Necrología de Theodor Boveri.*
- 1916 b- *Discurso en memoria de Theodor Boveri.*
- 1916 c- *Sobre transplantaciones en embriones de anfibios en la fase de gástrula.*
- 1918 a- *Sobre la determinación de las primeras formaciones orgánicas en el embrión de anfibios.*
- 1918 b- *A la memoria de Theodor Boveri.*
- 1919 a- *Investigaciones experimentales acerca del problema de la determinación y de la individualidad.*
- 1919 b- *Spemann y Falkenberg: Sobre desarrollo asimétrico y Situs inversus viscerum en gemelos y formaciones gemelas.*
- 1920 - *Album científico ilustrado.*
- 1921 a- *Técnica de la operatoria microquirúrgica.*
- 1921 b- *La producción de quimeras animales por transplantaciones embrional heteroplástica entre Tritón cristatus y taeniatus.*
- 1922 - *Rund, Gudrun y H. Spemann: El desarrollo de mitades de gástrula dorsales y laterales aisladas, de Tritón taeniatus y alpestris, en regulación y postgeneración.*
- 1923 - *Teoría del desarrollo animal.*
- 1924 a- *Spemann y H. Mangold: Sobre inducción de formaciones embrionales por implantación de zonas organizadoras de tipo distinto.*
- 1924 b- *Herencia y mecánica del desarrollo.*
- 1924 c- *Sobre zonas organizadoras en el desarrollo animal.*
- 1925 - *Algunos factores del desarrollo animal.*
- 1927 a- *Spemann y B. Geinitz: Sobre estímulo de la capacidad organizadora por transplantación en medios organizadores.*
- 1927 b- *Spemann y Else Bautzmann: Sobre regulación de gérmenes de Tritón con material meridiano excedente y faltante.*
- 1927 c- *En el 60 aniversario de Hans Driesch.*
- 1927 d- *O. Mangold y H. Spemann: Sobre inducción de la lámina medular en el germen joven. Un ejemplo de inducción homogenética o asimilatoria.*
- 1927 e- *Nuevos trabajos sobre zonas organizadoras en el desarrollo animal.*
- 1927 f- *Conferencia sobre zonas organizadoras en el desarrollo animal.*
- 1927 g- *Sobre zonas organizadoras en el desarrollo animal.*
- 1928 - *El desarrollo de mitades germinales laterales y dorsoventrales con provisión de núcleo retardada.*
- 1929 a- *Sobre la participación de la zona organizadora y del germen receptor en la formación de la inducción.*
- 1929 b- *Sobre zonas organizadoras en el desarrollo animal.*
- 1931 a- *El comportamiento de las zonas organizadoras después de la destrucción de su estructura.*
- 1931 b- *Sobre la participación de lo implantado y del germen receptor en la orientación y composición de la formación embrional inducida.*
- 1932 - *La transplantación xenoplástica como medio para el análisis de la inducción embrional.*
- 1933 - *Contribuciones experimentales a la teoría del desarrollo.*
- 1933 - *Spemann, Fischer y Wehneyer: Ensayos sobre el análisis de los medios de inducción en el desarrollo embrional.*
- 1934 - *Nuevos resultados de los estudios efectuados sobre fisiología del desarrollo.*

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MÚSICA

POR A. E. SAGASTUME BERRA

(Continuación *)

34. — En todos los casos que hemos venido tratando, las gamas (atemperadas) obtenidas son, por decir así, *naturales*, en el sentido de que ellas responden a los principios acústicos expuestos en los capítulos I y II, que deben constituir el fundamento lógico (así lo creemos) de la teoría musical. Además, esas gamas presentan otra particularidad que acentúa esa naturalidad. Dicha particularidad es la siguiente: en cada una de ellas aparecen como armónicos primarios, *todos* los números primos hasta un cierto valor: por ejemplo, en las gamas primitiva y pitagórica, los armónicos 2 y 3; en las tolemaicas, 2, 3 y 5; en la de Domínguez Berrueta, 2, 3, 5 y 7; se podría construir una gama con los armónicos 2, 3, 5, 7 y 11, o bien 2, 3, 5, 7, 11 y 13, y así sucesivamente.

Ahora bien, no excluimos la posibilidad de una gama en la cual aparezca un determinado armónico, sin que estén presentes al mismo tiempo algunos armónicos más bajos; por ej., una $\Gamma^{3,11}$, ó $\Gamma^{3,5,13}$, ó Γ^{19} , etc.

Es lógico que estas gamas naturales posibles no presenten, digámoslo así, una « musicalidad » tan perfecta como las anteriores. Por ejemplo, en una $\Gamma^{3,11}$, el músico notará la ausencia de las características terceras tolemaicas, v. gr. do-mi (Tol.), debidas al armónico 5, y le parecerá extraño que un acorde tonal de esta gama sea el do-fa#-sol (bien entendido, este fa# no coincide con ninguna de las notas homónimas que hemos encontrado). Sin embargo, opinamos que al artista puede convenir, en determinadas ocasiones, un conjunto de sonidos tan fuera de nuestros hábitos, precisamente para expresar alguna idea o sentimiento que intervenga en su obra.

Como ejemplo, daremos una Γ^{13} atemperada, muy satisfactoria de acuerdo con los criterios generales que hemos establecido, y que será

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

sumamente extraña y fuera de lo común debido a la ausencia de los armónicos inferiores 3, 5, 7 y 11.

Los valores de las $\gamma_{n_1}^{13}$, teniendo en cuenta que el $\log_2 13 = 3,70044$, serán

$$\gamma_{n_1}^{13} = F(3.70044 n_1),$$

o sea:

n_1	$\gamma_{n_1}^{13}$	n_1	$\gamma_{n_1}^{13}$
0	0.00000	6	0.20264
1	0.70044	7	0.90308
2	0.40088	8	0.60352
3	0.10132	9	0.30396
4	0.80176	10	0.00440
5	0.50220		

La gama atemperada $\Gamma_{(0,9)}^{13}$ tiene por consiguiente una coma $\varepsilon = 0,00440 \omega$, inferior a todas las anteriores. Disponiendo las $\gamma_{n_1}^{13}$ por orden creciente, se ve que las notas de la gama pueden representarse por

$$\gamma^{13}(0,9) = x_1 i_1 \pm x \varepsilon,$$

donde

$$i_1 = 0.10132 \omega$$

es el único intervalo entre las notas consecutivas. Por tanto se tiene:

$$\varepsilon = 0.00440 \quad ; \quad N = 10 \quad ; \quad \nu = 1 \quad ; \quad \Delta^2 = (0),$$

características que son, en sí, mejores que todas las encontradas con anterioridad.

No obstante, repitémoslo, el carácter de esta gama será sin duda extraño, viéndose menoscabada su « naturalidad » por la ausencia de los armónicos inferiores.

35. — Esa falta de naturalidad es, con todo, menos grave que en algunas gamas que vamos a ver ahora, y que gozan sin embargo de gran aceptación. Por lo menos, la $\Gamma_{(0,9)}^{13}$ dada a título de ejemplo en el § anterior, responde a principios acústicos y lógicos aceptables. En cambio, las gamas que vamos a ver ahora provienen de admitir ciertas convenciones cuya aceptabilidad constituirá, precisamente, uno de nuestros puntos fundamentales de discusión.

Comencemos por la llamada ordinariamente *gama atemperada*. Esta gama tiene una importancia enorme en nuestra música actual, pues según ella están afinados todos los instrumentos llamados « de sonidos fijos », el piano por ejemplo.

Dado que las gamas de Pitágoras y Tolomeo (o de Zarlino, o de los físicos) poseen, como necesariamente debe suceder, una *coma*, o sea una corrección a efectuar en una forma oportuna a fin de cerrar el ciclo de notas de la gama, pueden darse para el problema de la atemperación otras soluciones que no responden a los principios que venimos desarrollando.

Una de esas soluciones (no la única, ni siquiera la mejor, como veremos) consiste en dividir sencillamente la octava en 12 intervalos iguales. Cada uno de estos intervalos se llama un *semitono atemperado*, abreviado *semitono* (*at.*), y, como vimos en el § 9, su valor en ω es:

$$\alpha = \frac{1}{12} \omega = 0.08333 \omega.$$

Está, pues, comprendido entre la lima (Pit.) = 0,07519 ω y el semitono diatónico (Tol.) = 0,09311 ω . Como $12 \alpha = 1 \omega$, se podrán definir en la octava, 12 notas separadas una de otra por un semitono (*at.*), y constituir así la llamada *gama atemperada*, cuyas notas se expresan todas en función de la base α , y son:

do (<i>at.</i>) = 0	fa# (<i>at.</i>) = sol $\flat$ (<i>at.</i>) = 6 α
do# (<i>at.</i>) = re $\flat$ (<i>at.</i>) = α	sol (<i>at.</i>) = 7 α
re (<i>at.</i>) = 2 α	sol# (<i>at.</i>) = la $\flat$ (<i>at.</i>) = 8 α
re# (<i>at.</i>) = mi $\flat$ (<i>at.</i>) = 3 α	la (<i>at.</i>) = 9 α
mi (<i>at.</i>) = 4 α	la# (<i>at.</i>) = si $\flat$ (<i>at.</i>) = 10 α
fa (<i>at.</i>) = 5 α	si (<i>at.</i>) = 11 α .

Claro es que esta escala no responde a los principios que hemos establecido: con α , todos los intervalos de que consta son *racionales*, y en consecuencia, ninguno de ellos puede expresarse bajo la forma $F(\sum \pi_i n_i)$, es decir, no existen las $\pi_i = \log_2 p_i$ y por tanto, tampoco los armónicos generadores p_i .

Obsérvese que aquí nos estamos refiriendo a intervalos medidos en ω , y no a las relaciones de frecuencias. Es menester tener ésto muy presente para refutar a un posible defensor de la gama atemperada, que quisiera argumentar basado en la mayor sencillez que implican las relaciones racionales. No negamos el valor de este razonamiento, sino que merced a la observación hecha, lo vemos volverse en contra de quien lo esgrima. En efecto, la definición de la unidad ω y el hecho de medir en esta unidad los intervalos, no es sino un artificio matemático, cómodo sin duda (y fecundo, según vemos); pero no olvidemos que el fundamento de tales medidas está en la relación de frecuencias, y si expresamos por sus relaciones de frecuencias los intervalos pitagóricos, tolemaicos y de Domínguez Berrueta, veremos aparecer números racionales muy simples: $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}$, etc. mientras que los intervalos de la gama atemperada serían *irracionales* tan complicados como $\sqrt[12]{2}, \sqrt[6]{2}, \sqrt[12]{2^5}$, etc. Es decir, que el carácter racional o irracional de un intervalo se invierte a veces, como en este caso, según que lo midamos por su relación de frecuencias o en octavas.

Ya que la gama atemperada no responde a los principios acústicos, naturales y lógicos, desarrollados aquí, podemos preguntarnos a qué principios responde. Más en concreto: ¿en base a qué debe aceptarse la división de la octava en partes iguales? ¿Por qué han de ser precisamente 12 esas partes, y no otro número?

Lo único que puede aducirse para responder a la primera cuestión es la « sencillez » de la solución que así se da al problema de la atemperación. Ya hemos visto que la tal « sencillez » se refleja en la existencia de intervalos que precisamente se caracterizan por su complejidad. Pero aún admitiendo el argumento: ¿a qué precio se obtiene esa sencillez? No existen ya intervalos estrictamente consonantes, es en rigor absurdo decir que *do-mi-sol* (at.) sea un acorde perfecto mayor. Más aún, al dar este acorde en un instrumento, el *do* (at.) por ejemplo, suena conjuntamente con sus armónicos naturales, y el quinto de ellos, que es el *mi* (Tol.) = 0,32193, choca con el *mi* (at.) = 0,33333, produciendo una disonancia durísima. Esto es particularmente notable en el órgano, por ejemplo, donde los dos sonidos de frecuencias próximas producen una *pulsación* o *temblequeo* sumamente desagradable.

Pero aún admitiendo la división en partes iguales, queda la segunda cuestión: ¿por qué han de ser precisamente 12 las notas? La

única razón que se nos alcanza en esto es de índole histórica, o por mejor decir, atávica. La gama de Pitágoras, que gozó de gran boga en la Edad Media especialmente gracias a los trabajos teóricos de Boecio (siglo VI), contiene 12 notas; y entonces es lógico que posteriormente, al introducirse en tiempos de Bach y Rameau la gama atemperada, lo más conveniente desde el punto de vista práctico fuera conservar esa división de 12 partes. Pero en realidad hay rastros de otras divisiones, en 43, en 17, en 19 partes, etc. Y no hay razón para que así no sea, si se admite la división en partes iguales, «a la manera de una escala termométrica», según expresión del Sr. Domínguez Berrueta (V).

El argumento más fuerte que en su favor tiene la gama atemperada, y que tal vez fué el que decidió a adoptarla a Bach y Rameau, es la posibilidad de la *transposición*, en los instrumentos de sonidos fijos. Expliquemos un poco este punto: la gama atemperada es perfectamente uniforme en toda su extensión; o, dicho más claramente: cualquiera sea la nota que se tome como origen, los intervalos sucesivos son todos iguales a α , y por tanto, se distribuyen de la misma manera en todos los casos. De ahí resulta la posibilidad de trasladar o *transportar* una melodía cualquiera, de un lugar a otro de la escala, conservándose exactamente los intervalos que componen esa melodía. Esto no es posible, por ejemplo, en la gama tolemaica cromática, pues si suponemos que una melodía comience, pongamos por caso, con las notas *do*, *fa*, *mi $\flat$* , tendremos, según la tabla del § 26, los intervalos:

$$\text{do-fa} = 0.41504 \omega \quad ; \quad \text{fa-mi}\flat = -0.15200 \omega ,$$

y si buscamos otra nota de origen para reproducir los mismos intervalos, solo tenemos como posibles las siguientes transposiciones: *do $\sharp$ fa $\sharp$ -mi* ; *mi $\flat$ -la $\flat$ -sol $\flat$* ; *mi-la-sol* ; *mi $\sharp$ -la $\sharp$ -sol $\sharp$* ; *sol-do-si $\flat$* ; *sol $\sharp$ -do $\sharp$ -si* ; *si $\flat$ mi $\flat$ -re $\flat$* ; *si-mi-re* ; *si $\sharp$ -mi $\sharp$ -re $\sharp$* ; mientras que por ej. la melodía *fa $\sharp$ -si-la* no sería una transposición de la dada, pues *fa $\sharp$ -si* = 0,43295 ω , *si-la* = -0,16992 ω . Y naturalmente, si la melodía dada contuviera más notas, las posibilidades de transposición se reducirían.

Es indudable que en ninguna gama natural, ni aún en la $\Gamma_{(0,9)}^{13}$, notable por su regularidad, se presenta semejante posibilidad ilimitada de transposición. Pero ¿es que la transposición tiene tan grande importancia que se le deban sacrificar principios acústicos fundamentales, como los que llevamos expuestos? La respuesta parece, por

lo menos, dudosa. Por el contrario, séanos permitido creer que, respetando esos principios acústicos y sacrificando en cambio la transposición estricta, no siendo posible sino una transposición aproximada, como en el caso tolemaico antes tratado $do-fa-mi_b \rightarrow fa\#-si-la$, ganaríamos en riqueza de medios artísticos en lugar de perder. Una misma melodía podrá presentarse entonces en diferentes *modos* (véase lo que decimos en el capítulo VI), con otros tantos matices, dando así una música más rica que si la transposición se redujera a una repetición estricta a otra altura.

Mucho más podríamos decir con respecto a la gama atemperada: creemos, sin embargo, que es suficiente con lo anterior, a lo que agregaremos una última observación. Es dudoso hasta qué punto la afinación de los instrumentos responde hoy día a la gama atemperada. En efecto, una vez tomado el punto de partida, por ejemplo el *la* normal de 435 vibraciones por segundo, las demás notas de un instrumento se afinan a oído, y con el auxilio también de las pulsaciones producidas entre dos sonidos; y ambos medios, el oído y las pulsaciones, se rigen por los fenómenos naturales de los armónicos, es decir, caen dentro de lo que venimos exponiendo. Es, pues, más que probable que la afinación de un instrumento tenga, aún hoy, un carácter pitagórico o tolemaico, alejado sin duda de la atemperación « termométrica » ideal de la gama atemperada.

36. — Si nos hemos extendido un tanto en las razones que hemos dado en contra de la gama atemperada, es porque ellas se aplican, *mutatis mutandis*, a toda una serie de procedimientos artificiales de atemperación que, siendo más o menos malos que la división en partes iguales, poseen análogos inconvenientes. Citaremos varios ejemplos ⁽¹⁾.

Como hemos visto, o mejor dicho, como resulta de las consideraciones de los §§ 25 y 26, una vez que se han tomado a partir de una nota cualquiera cuatro quintas pitagóricas, es necesario disminuir una coma tolemaica para obtener exactamente la tercera tolemaica; o, en números,

$$4\chi - \varepsilon \text{ (Tol.)} - 2\omega = 4 \times 0.58496 - 0.01791 - 2 = 0.32193 \varepsilon = \tau$$

(véase § 10). Si en lugar de corregir en 0,01791 ω cada cuatro quin-

⁽¹⁾ Para más detalles, consúltase J. MURRAY BARBOUR (XI).

tas, corregimos cada quinta en $\frac{1}{4} \varepsilon$ (Tol.), obtendremos el mismo resultado final, aunque claro es que no las mismas notas intermedias. Este sistema de atemperación toma el nombre de *entonación media*, o *atemperación media*, y tiene el inconveniente de dar notas, en general, demasiado bajas con respecto a las de la gama tolemaica cromática.

Tiene, por lo demás, defectos análogos a la atemperación común, aunque es algo mejor pues conserva algunos intervalos naturales, en especial las terceras tolemaicas. Puede, pues, decirse que algunas de sus notas pertenecen a la Γ^5 pero en cambio desaparecen las quintas justas, y con ellas toda traza del armónico 3, más importante que el 5.

Puede decirse que en la entonación media hay acordes tonales, que constan de una nota y su tercera justa.

El español Francisco de Salinas (siglo XVI) y el italiano Zarlino han estudiado, no sólo esta entonación media, sino también otros dos tipos, en que cada quinta es corregida en $\frac{2}{7}$ ó en $\frac{1}{3}$ de coma sintónica, de los cuales parece ser preferible el último. Se viene así a caer en la división en 19 intervalos propiciada por Aristoxeno, el adversario de Pitágoras. En efecto, $1\chi - \frac{1}{3} \varepsilon$ (Tol.) = 0,58496 — 0,00597 = 0,57899 ω , que coincide muy aproximadamente con la undécima nota aristoxénica, pues $\frac{11}{19} = 0,57895 \omega$.

Otro procedimiento es el de Grammateus, quien conserva las notas pitagóricas llamadas *diatónicas*, do-re-mi-fa-sol-la-si, e intercala las cromáticas do# = re $\flat$, re# = mi $\flat$, fa# = sol $\flat$, sol# = la $\flat$, la# = si $\flat$, dividiendo en dos partes iguales los intervalos entre las notas diatónicas. Al contrario de la entonación media, sus notas son, en general, demasiado altas. Posee acordes tonales pitagóricos, formados por las quintas que contiene.

37.—Mucho más natural es la gama del español Ramos Pareja (siglo XV), quien conserva todas las quintas pitagóricas entre las notas diatónicas, a excepción de la quinta sol-re, a la cual corrige en una *coma* (Tol.). Puede decirse entonces que esta gama se funda en los armónicos naturales 3 y 5, y precisamente cae bajo nuestra teoría general de la atemperación. Es una $\Gamma_{MNR}^{3,5}$, designando con *MNRS* el paralelogramo indicado en la figura 10. Hay 12 puntos *P*,

y 18 puntos Q , que hemos indicado también en la figura. Lo mismo

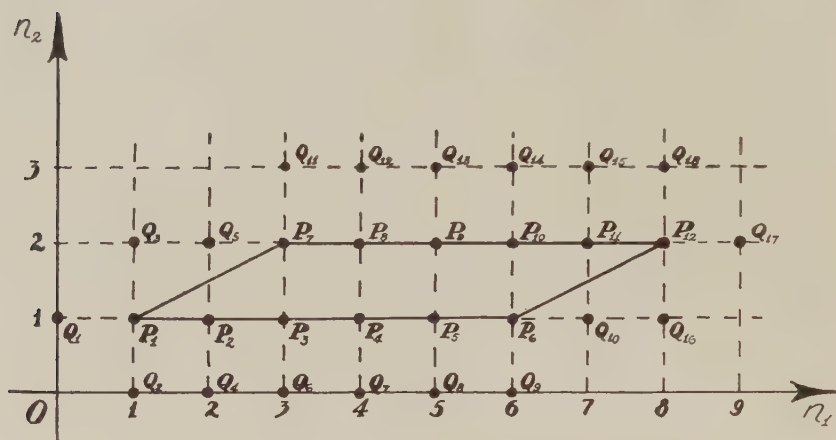


Fig. 10

que hemos hecho en casos anteriores, damos a continuación la tabla correspondiente:

Punto P_k	$\gamma_{P_k}^{3,5}$	Puntos Q_h	$\gamma_{Q_h}^{3,5}$	Punto P_k	$\gamma_{P_k}^{3,5}$	Puntos Q_h	$\gamma_{Q_h}^{3,5}$
$P_1(1,1) = \text{la } \flat$	0.90689	$Q_1(0,1)$	0.32193	$P_7(3,2) = \text{re}$	0.39875	$Q_{11}(3,3)$	0.72067
		$Q_2(1,0)$	0.58496				
		$Q_3(1,2)$	0.22882				
$P_2(2,1) = \text{mi } \flat$	0.49185	$Q_4(2,0)$	0.16992	$P_8(4,2) = \text{la}$	0.98371	$Q_{12}(4,3)$	0.30563
		$Q_5(2,2)$	0.81378				
$P_3(3,1) = \text{si } \flat$	0.07682	$Q_6(3,0)$	0.75489	$P_9(5,2) = \text{mi}$	0.56867	$Q_{13}(5,3)$	0.89059
$P_4(4,1) = \text{fa}$	0.66178	$Q_7(4,0)$	0.33985	$P_{10}(6,2) = \text{si}$	0.15363	$Q_{14}(6,3)$	0.47555
$P_5(5,1) = \text{do}$	0.24674	$Q_8(5,0)$	0.92481	$P_{11}(7,2) = \text{fa}\sharp$	0.73860	$Q_{15}(7,3)$	0.06052
$P_6(6,1) = \text{sol}$	0.83170	$Q_9(6,0)$	0.50977	$P_{12}(8,2) = \text{do}\sharp$	0.32356	$Q_{16}(8,1)$	0.00163
		$Q_{10}(7,1)$	0.41667			$Q_{17}(9,2)$	0.90852
						$Q_{18}(8,3)$	0.64548

La coma vale aquí $\varepsilon = 0,00163 \omega$, y se produce por ejemplo, entre P_1 y Q_{17} . Ordenando ahora las notas de modo que $do (R. P.) = 0,00000 \omega$, resulta:

Denominación	Nota	Intervalo	Denominación	Nota	Intervalo
do (R.P.)	0.00000		sol (R.P.)	0.58496	0.09310
		0.07682			0.07519
do# »	0.07682		la $\flat$ »	0.66015	
		0.07519			0.07682
re »	0.15201		la »	0.73697	
		0.09310			0.09311
mi $\flat$ »	0.24511		si $\flat$ »	0.83008	
		0.07682			0.07681
mi »	0.32193		si »	0.90689	
		0.09311			0.09311
fa »	0.41504		do »	1.00000	
		0.07682			—
fa# »	0.49186		—	—	—

Los intervalos $0,07519 \omega$ y $0,07682 \omega$ solo difieren en una coma, y por tanto deben considerarse iguales. Además de este intervalo, solo hay otro, el $0,09311 \omega$, de modo que las características de esta gama son:

$$\varepsilon = 0.00163 \quad ; \quad N = 12 \quad ; \quad \nu = 2 \quad ; \quad \Delta^2 = (0.01792 \omega),$$

y una base está dada por los intervalos ya considerados, de modo que

$$\gamma^{3,5} (R.P.) = x_1 i_1 + x_2 i_2 \pm x \varepsilon$$

$$i_1 = 0,09311 \omega \quad ; \quad i_2 = 0,07519 \omega \quad ; \quad \varepsilon = 0.00163 \omega .$$

Las características de esta gama son muy aceptables; compárense con las de la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$, § 26, y se verá que hay superioridad en todos los caracteres de la gama de Ramos Pareja.

CAPÍTULO V

FUNDAMENTOS DE LA ARMONIA

38. — Por *armonía* o *harmonía* se entiende en música el estudio de los distintos *acordes* o conjuntos de sonidos, su clasificación, las relaciones existentes entre ellos, sus combinaciones, y las marchas armónicas de las voces o instrumentos de una composición musical. En ésta aparece también otro elemento principalísimo, y en cierto modo contrapuesto a la armonía: es la *melodía*, o sea la sucesión de notas o sonidos (y silencios o pausas) que corresponden a cada voz o instrumento especial. En la mayoría de los casos se reserva el nombre de melodía a la sucesión de notas que corresponden a la voz o instrumento principal; pero hay también melodía en las demás voces, en el sentido más amplio que hemos indicado, y por otra parte, hay casos en que la melodía en sentido restringido no existe, por haber varias voces de primera importancia que ejecutan cada una una sucesión distinta de notas.

La melodía y la armonía son elementos complementarios en sentido análogo a lo que lo son los conceptos de sucesión y simultaneidad, movimiento y reposo. Un acorde o una armonía, está constituido por notas que se ejecutan simultáneamente; una melodía, por notas que se ejecutan sucesivamente; un solo acorde, lo mismo que una melodía puede tener, y tiene por lo general, un significado, nos produce cierta sensación de reposo, majestad, serenidad, o por lo contrario, de movimiento, de inquietud. En cambio, una sola nota de una armonía o melodía no significa absolutamente nada. Es solamente su combinación con las demás, y con las pausas (por medio del *ritmo*, otro elemento importante) lo que tiene un significado de por sí. Partiendo de una nota arbitraria (que no tiene ningún significado armónico ni melódico) podemos construir muchas armonías distintas, y también muchas melodías distintas. La obra musical se extiende así, a partir de su primera nota, en dos sentidos o, para utilizar un símil matemático, según dos coordenadas. Las abscisas representan, por ejemplo, la melodía; las ordenadas, la armonía. Si se nos da la nota inicial y la melodía, las armonías restantes quedan

determinadas, hasta cierto punto; viceversa, si se nos da la nota inicial y la armonía (inicial también), queda determinada, dentro de ciertos límites, la melodía.

De acuerdo con ésto, se ve que armonía y melodía no son independientes, sino que por el contrario, se complementan y condicionan mutuamente para formar la obra musical. Son como los sistemas de fibras verticales y horizontales de un tejido, que cada uno no es sino una parte del tejido, que no puede existir y se deshace sin el otro. Hasta en la escritura se hacen patentes estas relaciones, pues se escriben en una misma línea vertical las notas simultáneas, cuyo conjunto determina la armonía, y en sentido horizontal van dispuestos los pentagramas o pautas, donde se escribe la melodía.

Si estudiamos por separado la armonía, así como la melodía y el ritmo, no es sino por razones de metodización científica, siguiendo el principio de pasar de lo particular a lo general y de lo simple a lo complejo.

39. — En una gama natural, fundada en los armónicos $p_1, p_2, \dots, p_r$, es precisamente la presencia de estos armónicos, con exclusión de todo otro, lo que determina el carácter de la $\Gamma^{p_1, \dots, p_r}$ y la distingue de todas las demás. La atemperación no hace sino delimitar, mediante ciertos procedimientos que ya hemos estudiado en el Capítulo III, las notas que deben tomarse para constituir la gama práctica, atemperada, $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$; pero deja subsistente el carácter fundamental a que nos referimos.

No es, pues, extraño, que si tomamos una nota cualquiera $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$ y a partir de ella las que representan sus propios armónicos $p_1, p_2, \dots, p_r$, obtengamos un conjunto de notas de $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ o de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ (supuesto que en ésta sea también posible tomar esos armónicos) que caracterizan a la gama. Se tiene así un conjunto de sonidos, o sea un *acorde*, que podemos llamar *acorde perfecto* o *tonal, mayor*, y que caracteriza a la $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ ó $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ de que se trata. Ya hemos visto en lo anterior varios ejemplos.

Nuestro objeto es ahora generalizar aquellas consideraciones, hechas en casos concretos, y dar así las bases de una teoría general de la *armonía*, en la que estos acordes tienen un papel básico.

Si tomamos la $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$ y tenemos en cuenta la expresión (§ 14)

$$\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r} = F \left(\sum_i n_i \pi_i \right),$$

la nota que da el armónico p_k de ésta (donde k puede ser 1, 2, ..., r)

se obtendrá sumando a la expresión anterior el número $\pi_k = \log_2 p_k$, o mejor (para reducir a la octava fundamental) su parte fraccionaria, $F(\pi_k)$. El armónico p_k de $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$ será así:

$$\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r} + F(\pi_k) = F\left(\sum_i n_i \pi_i\right) + F(\pi_k);$$

pero la suma que figura en el segundo miembro, o sea:

$$F(n_1 \pi_1 + n_2 \pi_2 + \dots + n_k \pi_k + \dots + n_r \pi_r) + F(\pi_k)$$

solo difiere de

$$\gamma_{n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r} = F(n_1 \pi_1 + n_2 \pi_2 + \dots + (n_k + 1) \pi_k + \dots + n_r \pi_r)$$

en el número $\theta\left(\sum_i n_i \pi_i, \pi_k\right)$, que puede ser 0 ó 1, pero que es siempre entero, y ésto en virtud del Lema I del § 16 (fórmulas [5] y [5'], donde $\alpha = \sum_i n_i \pi_i$, $\beta = \pi_k$). Es decir, que el armónico que buscamos, reducido a la octava fundamental, da precisamente la nota $\gamma_{n_1, \dots, n_k+1, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}$, en la que solamente el índice correspondiente al armónico p_k ha sido aumentado en una unidad, permaneciendo inalterados los otros.

Haciendo sucesivamente $k = 1, 2, \dots, r$, vemos que el acorde perfecto mayor de $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ formado a partir de la nota $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$, *nota fundamental* del acorde, está formado por la $r + 1$ notas siguientes:

la nota $\gamma_{n_1, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_r}$, *nota fundamental* del acorde;

su armónico p_1 , o sea $\gamma_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{p_1, p_2, \dots, p_r}$;

» » p_2 , » » $\gamma_{n_1, n_2+1, n_3, \dots, n_r}^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}$;

» » p_3 , » » $\gamma_{n_1, n_2, n_3+1, \dots, n_r}^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}$;

.....;

» » p_r , » » $\gamma_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r+1}^{p_1, \dots, p_{r-1}, p_r}$.

En la representación hiperspacial (§ 29), los vértices del $r + 1$ -edro de E_r , es decir, el origen O y los puntos-unidad $U_1, \dots, U_r$ sobre cada uno de los ejes, forman un acorde perfecto

mayor, en virtud de lo que acabamos de ver (en este caso es $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$) y de la definición misma de O y de los puntos-unidad U_k . Trasladando este $r + 1$ -edro de modo que el punto O vaya a ocupar un punto P , de coordenadas $(n_1, n_2, \dots, n_r)$, los vértices de este nuevo $r + 1$ -edro representan precisamente las notas del acorde mayor cuya fundamental es $\gamma_P^{p_1 \dots p_r}$; y viceversa, dado este acorde, los puntos representativos de sus notas forman un $r + 1$ -edro que puede ser obtenido por traslación del $OU_1 U_2 \dots U_r$. Por consiguiente, teniendo en cuenta la invariancia de los intervalos por traslación (§ 29), obtenemos que: *todos los acordes mayores de $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ (o los que existan en $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$) están formados por iguales intervalos, y se obtienen unos de otros variando en iguales intervalos sus notas constitutivas* (o sea, por transposición, § 35).

Según estos resultados, a cada punto reticulado corresponde un acorde perfecto mayor (el que tiene por nota fundamental la representada por el punto) y recíprocamente, de modo que el acorde cuya nota fundamental esté representada por el punto P , de coordenadas $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ puede simbolizarse por $[P]$ o por $[n_1, n_2, \dots, n_r]$ indistintamente.

El estudio de los acordes perfectos mayores de $\Gamma^{p_1, \dots, p_r}$ se reduce así al del acorde $[O]$ o $[0, 0, \dots, 0]$ cuyas notas constitutivas son (véase más arriba):

$$\text{la fundamental} \quad \gamma_{0, \dots, 0}^{p_1, \dots, p_r} = 0 \omega$$

$$\text{el armónico } p_1, \text{ o sea: } \gamma_{1, 0, \dots, 0}^{p_1, p_2, \dots, p_r} = F(\pi_1)$$

$$\text{» » } p_2, \text{ » » : } \gamma_{0, 1, 0, \dots, 0}^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r} = F(\pi_2)$$

.....

$$\text{» » } p_r, \text{ » » : } \gamma_{0, \dots, 0, 1}^{p_1 \dots p_{r-1}, p_r} = F(\pi_r) .$$

Por ejemplo: en la $\Gamma^{3, 5, 7}$ el acorde $[O]$ consta de las 4 notas:

$$\gamma_{0, 0, 0}^{3, 5, 7} = 0 \omega \quad ; \quad \gamma_{1, 0, 0}^{3, 5, 7} = F(\log_2 3) = 0,58496 \omega .$$

$$\gamma_{0, 1, 0}^{3, 5, 7} = F(\log_2 5) = 0,32193 \omega \quad ; \quad \gamma_{0, 0, 1}^{3, 5, 7} = F(\log_2 7) = 0,80735 \omega .$$

40.— También hay otro acorde característico de una $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ que es el acorde *perfecto* o *tonal menor*, que vamos a definir ahora. Si tomamos como nota *fundamental* una nota $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$, podemos conside-

rar aquellas notas de las cuales la dada es el armónico p_1 , el $p_2, \dots$, el p_r . Estas $r + 1$ notas dan el acorde perfecto menor.

Por la misma demostración hecha en el § anterior, resulta que si tomamos la nota $\gamma_{n_1, \dots, n_k-1, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}$, el armónico p_k de ésta es precisamente la nota dada $\gamma_{n_1, \dots, n_k, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}$. Luego, las notas que forman el acorde menor son:

$$\begin{array}{ll} \text{la nota fundamental} & \gamma_{n_1, \dots, n_r}^{p_1, \dots, p_r}; \\ \text{aquella de la cual es armónico } p_1, \text{ o sea} & \gamma_{n_1-1, n_2, \dots, n_r}^{p_1, p_2, \dots, p_r}; \\ \text{» » » » » } & p_2, \text{ » » } \gamma_{n_1, n_2-1, n_3, \dots, n_r}^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}; \\ \text{» » » » » } & p_3, \text{ » » } \gamma_{n_1, n_2, n_3-1, \dots, n_r}^{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r}; \\ \dots & \dots \\ \text{» » » » » } & p_r, \text{ » » } \gamma_{n_1, \dots, n_{r-1}, n_r-1}^{p_1, \dots, p_{r-1}, p_r}. \end{array}$$

En el espacio E_r , cuyo reticulado representa la $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$, el punto H de coordenadas $(1, 1, \dots, 1)$ junto con los puntos: $H_1(0, 1, \dots, 1)$, $H_2(1, 0, 1, \dots, 1)$, $H_3(1, 1, 0, 1, \dots, 1)$, $\dots$, $H_r(1, \dots, 1, 0)$ forman un $r + 1$ -edro que representa un acorde tonal menor. Cada uno de los puntos H_k está situado en uno de los hiperplanos coordinados (véase § 28), el hiperplano $n_k = 0$, y el $r + 1$ -edro, una vez efectuada la traslación que lleva H a coincidir con el origen O , se coloca en posición simétrica del que representa el acorde mayor $[O]$. En efecto, la traslación produce una disminución de una unidad en todas las coordenadas de H , y por tanto, de los demás puntos; y entonces H_1 se transforma en el punto $(-1, 0, 0, \dots, 0)$ simétrico de $U_1(1, 0, \dots, 0)$ respecto a O ; H_2 en el punto $(0, -1, 0, \dots, 0)$, simétrico de $U_2(0, 1, 0, \dots, 0)$; $\dots$; H_r en $(0, \dots, 0, -1)$, simétrico de $U_r(0, \dots, 0, 1)$.

Como en el caso de los acordes mayores, *todo acorde menor de $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ (o los que existan en una $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$) pueden ser obtenidos por una traslación del que acabamos de considerar, y por consiguiente están constituidos por los mismos intervalos, y se obtienen unos de otros por transposición estricta.*

Podemos también designar a cada acorde menor de acuerdo con su nota fundamental, o el punto que la representa en E_r ; si $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r} = \gamma_P^{p_1 \dots p_r}$ es la nota fundamental del acorde tonal menor, éste se designará por $\{P\}$ o por $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$. Por ejemplo, el acor-

de menor que consideramos más arriba como tipo, es el acorde $\{H\} = \{1, 1, \dots, 1\}$. Este acorde está constituido por las notas:

fundamental,

$$\gamma_H^{p_1 \dots p_r} = F \left(\sum_i \pi_i \right)$$

aquella de la que es armónico p_1 , o sea $\gamma_{H_1}^{p_1 \dots p_r} = F (\pi_2 + \pi_3 + \dots + \pi_r)$

» » » » » p_2 , » » $\gamma_{H_2}^{p_1 \dots p_r} = F (\pi_1 + \pi_3 + \dots + \pi_r)$

» » » » » p_3 , » » $\gamma_{H_3}^{p_1 \dots p_r} = F (\pi_1 + \pi_2 + \pi_4 + \dots + \pi_r)$

» » » » » p_r , » » $\gamma_{H_r}^{p_1 \dots p_r} = F (\pi_1 + \dots + \pi_{r-1})$

Por ejemplo: en la $\Gamma^{3,5,7}$, el acorde $\{H\}$ consta de las cuatro notas:

$$\gamma_{1,1,1}^{3,5,7} = F (\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7) = 0,71424 \omega$$

$$\gamma_{0,1,1}^{3,5,7} = F (\log_2 5 + \log_2 7) = 0,12928 \omega$$

$$\gamma_{1,0,1}^{3,5,7} = F (\log_2 3 + \log_2 7) = 0,39232 \omega$$

$$\gamma_{1,1,0}^{3,5,7} = F (\log_2 3 + \log_2 5) = 0,90689 \omega .$$

En la figura 11 hemos representado el acorde mayor $[O]$ y el menor $\{4, 1, 3\}$ para objetivar nuestras consideraciones.

41.—Por este procedimiento, es decir, tomando una nota fundamental y aquellas que representan sus armónicos contenidos en la $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$, o bien aquellas de las que esa nota proviene como armónico, no es posible construir otras clases de acordes; o por lo menos, si fuera posible, ello excede los límites de todo lo que se ha acostumbrado hasta hoy en la música. Estos acordes *mixtos*, ni mayores ni menores, posibles desde un punto de vista abstracto, estarían formados por una nota fundamental y, para ciertos índices, los armónicos correspondientes, mientras que para los índices restantes, habría que tomar aquellas notas de las cuales proviene $\gamma_{n_1 \dots n_r}^{p_1 \dots p_r}$ como armónico. Es decir, que además del punto $(n_1, n_2, \dots, n_r)$ aparecerían en la representación espacial, algunos puntos del tipo $(n_1, \dots, n_k + 1, \dots, n_r)$, y otros del tipo $(n_1, \dots, n_k - 1, \dots, n_r)$. Por ejemplo, en la gama tolemaica cromática, un tal acorde mixto estaría constituido por las notas (véase fig. 7):

$$\gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do (fundam.)} \quad ; \quad \gamma_{4,3}^{3,5} = \text{fa} \quad ; \quad \gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi};$$

otro, por ejemplo, por las notas

$$\gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi (fundam.)} \quad ; \quad \gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do} \quad ; \quad \gamma_{6,4}^{3,5} = \text{si} .$$

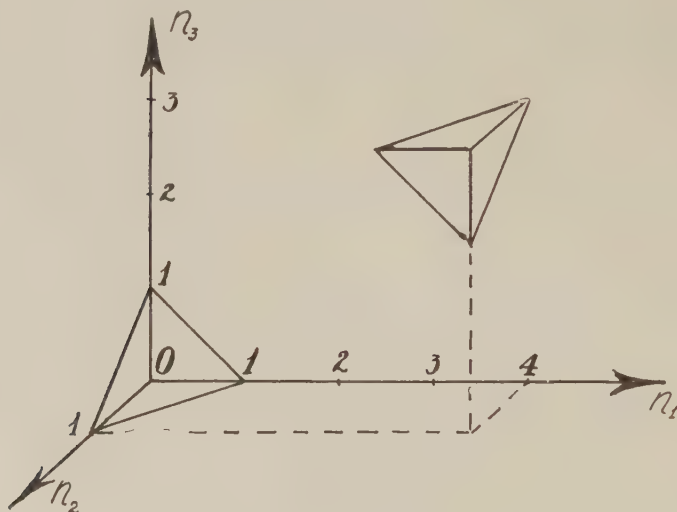


Fig. 11.

Dicho en otros términos: un acorde mixto se compondría de su nota fundamental, y además, r notas vecinas a ella, elegidas arbitrariamente pero de modo que no queden dos de estas notas vecinas sobre la misma paralela a uno de los ejes coordenados. O, si se prefiere, de la nota fundamental llevaríamos en la dirección de cada uno de los ejes un vector de módulo unitario, positivo o negativo a elección, y los extremos de estos vectores nos darían las notas restantes del acorde. Cuando todos los vectores son positivos, obtenemos un acorde mayor; si todos son negativos, uno menor.

Pero, repetimos, estos acordes mixtos «abstractos» presentan, por lo menos hasta ahora, escaso interés musical.

Nótese que según las ideas expuestas acerca de la generación de los acordes menores y mayores, venimos a coincidir en lo esencial, y salvo nuestra mayor generalidad de conceptos, con Rameau y con las ideas expuestas modernamente por H. Riemann, quienes consideran el acorde menor como una especie de inversión del mayor, en el sentido de que sus intervalos, contados *hacia abajo*, son exactamente los mismos que, contados *hacia arriba*, contiene el mayor, y viceversa. De ahí que, con Riemann, consideremos como nota fundamental del acorde menor, no la más baja (caso de los acordes ma-

yores) sino la que usualmente se coloca más alta, por ej. el *mi* en el acorde tolemaico la-do-mi. De ahí también que, llevando más lejos esa « inversión », pueda hablarse, con Domínguez Berrueta, de un principio general (más general de lo que sospechó este autor) análogo al *principio de dualidad* de la Geometría, que permite, de cada composición escrita en modo mayor, deducir otra escrita en modo menor, y viceversa, de tal modo que los intervalos de cada una, en sentido ascendente, son exactamente los mismos que, en sentido descendente, contiene la otra. Pero este principio, como veremos (§ 51) no tiene una validez ilimitada.

Este se traduce geométricamente, por una simetría respecto a un determinado punto de E_r , y se manifiesta, en cuanto a nuestro estudio, como un principio de *economía*, que nos permite reducirnos, hasta cierto punto, al estudio del acorde mayor, pues todo lo que de él digamos se traduce inmediatamente en una proposición *dual* o *recíproca* referente al acorde menor, y viceversa (salvo explícita advertencia en contrario, que cuidaremos de hacer en los casos en que no sea aplicable el principio).

El acorde mayor revela de una manera directa la constitución armónica de la gama, pues al escuchar los sonidos que lo componen, estamos escuchando, con la nota fundamental del acorde, los armónicos que, por pertenecer a la $\Gamma^m \dots p_r$, le dan su carácter, y tales como serían producidos por una cuerda que diera la misma nota fundamental. Es por eso que el acorde mayor presenta una apariencia de cosa terminada, conclusiva, y nos da la impresión de reposo, grandeza, brillantez y análogas.

En cambio en el acorde menor, si bien tenemos también una caracterización de la gama, la interpretación de su concomitancia de sonidos no se produce espontáneamente (por eso ya decía Rameau que el acorde mayor se produce en la naturaleza, mientras que el menor es artificial), y requiere para su comprensión un cierto proceso subjetivo que, por elemental e inconsciente que sea, existe. El fundamento armónico de la gama surge inmediatamente del acorde mayor; mediatamente, en cambio, del menor. De ahí que el acorde menor, también conclusivo, sirva para expresar suavidad, nostalgia, y en general, sentimientos deprimentes.

(Continuará)

SUBORDINACION DE LA METRICA NO-EUCLIDEA A LA GEOMETRIA PROYECTIVA⁽¹⁾

POR

E. A. DE CESARE

1. CONCEPTO DE TEORÍA DEDUCTIVA. — Una teoría deductiva consiste en un doble proceso reductivo:

1º) reducción de nuevos conceptos, mediante definiciones oportunas, a otros conceptos, supuestos conocidos;

2º) reducción de proposiciones, mediante demostración a otras proposiciones enunciadas previamente.

Un concepto, se reduce a otros conceptos supuestos ya conocidos, mediante una definición, con el concurso de operaciones puramente lógicas y del mismo modo, se demostrará una proposición (teorema) nueva, reduciéndola por medio de implicaciones, a una combinación formal de otras proposiciones, admitidas como ciertas o ya demostradas.

Se comprende, que este doble proceso, no puede ser proseguido indefinidamente *ad infinitum*. De aquí que, como fundamento de toda teoría deductiva, sea necesario, enunciar algunos conceptos fundamentales o *ideas primitivas*, como también se les llama, los cuales deben suponerse previamente adquiridos. En general, es la intuición o la experiencia, quien nos sugiere tales conceptos.

Formuladas las ideas primitivas, debe atribuírseles, algunas propiedades compatibles (no contradictorias) que se enunciaran, mediante proposiciones, llamadas: *proposiciones primitivas* o *postulados*, y es claro, que las únicas propiedades de que será lícito hacer uso, en el ulterior desarrollo lógico de la teoría deductiva, son las enunciadas en los postulados.

Puesto que las ideas primitivas intervienen en la institución de la teoría, por intermedio de los postulados, puede decirse, que los

(1) De una serie de Lecciones dictadas en el « Colegio Libre de Estudios Superiores ».

conceptos fundamentales, quedan definidos, por los postulados mismos, cuyas propiedades enumeran. A esta manera de definición, se le llama, definición por postulados.

De la combinación adecuada de los postulados, con las leyes de la lógica formal, resultan nuevas proposiciones, que constituyen los llamados *teoremas*.

Condición esencial, para la fundamentación axiomática de una teoría deductiva, es que los postulados sean compatibles, es decir, que de algunos de ellos, no sea posible deducir la negación de algún otro de los postulados del sistema. Los postulados pueden ser *independientes*, pero si bien esta condición no es necesaria, exigirla obedece a razones de purismo lógico.

Un postulado p se dice que es independiente de los postulados a , b , c , si no es una consecuencia de ellos: en otros términos, es compatible con el sistema a , b , c , tanto el postulado p , como su contradictorio no p ($= \bar{p}$).

Resulta de aquí, que en último análisis, la independencia de un sistema de postulados, se reduce a verificar una condición de compatibilidad, puesto que probar que los postulados α y β son independientes, consiste en hacer ver que α es compatible con β y con la negación de β , esto es con no β ($= \bar{\beta}$).

§ 2. — La Geometría Euclídea, es una teoría lógico-deductiva, que puede fundarse en un sistema de postulados, que la moderna crítica ha reducido a los grupos siguientes:

I) postulados de pertenencia; II) postulados de ordenación; III) postulados de congruencia; IV) postulado de las paralelas; V) postulado de continuidad. La geometría fundada en el sistema I ... V, ha recibido el nombre de geometría euclídea.

Las geometrías que rechazan el postulado IV, son las llamadas geometrías no-euclídeas.

Si fuese posible demostrar el postulado IV, apoyándose en los restantes, se habría conseguido reducir al absurdo las geometrías no-euclídeas.

Pero en el desarrollo de estas geometrías, tal absurdo no se ha presentado y si bien las conclusiones obtenidas, no concuerdan, con nuestra intuición del espacio, es menester aceptar sus consecuencias, en tanto que se siguen lógicamente de los postulados admitidos.

Si bien hasta ahora, no ha aparecido contradicción alguna, cabría la duda de si en su desarrollo ulterior, pudiese aparecer algún absurdo, que invalidase toda su estructura. Quedará resuelto el pro-

blema, si se consigue establecer que el postulado IV, es independiente del sistema formado por los postulados I, II, III, V, esto es, si se consigue probar que tal sistema, es compatible, tanto con la aceptación del postulado IV, como con su rechazo.

Para lograr este resultado, se procurará construir una teoría deductiva que satisfaga al sistema I, II, III, V, pero que rechaza el postulado IV.

De la posibilidad de construir efectivamente esta teoría geométrica, se deducirá la independencia del postulado de las paralelas, de los restantes postulados y en consecuencia, la posibilidad lógica del desarrollo de las geometrías no-euclídeas.

§ 3. — Para lograr nuestro objeto, son menester algunas consideraciones previas. Empezaremos por formular dos grupos de postulados, tal como lo hace F. Enriques, sobre los cuales, es posible fundamentar las veintisiete primeras proposiciones euclídeas.

Un primer grupo de postulados es el que permite caracterizar las propiedades lineales de la recta, sobre una superficie plana. Este primer grupo está constituido por los postulados que siguen:

I₁. La recta es una serie de infinitos puntos, ordenados según dos órdenes naturales, inverso el uno del otro. En estos órdenes naturales se verifica que entre dos puntos, existen siempre puntos intermedios. No existe un punto que sea primero, ni un punto que sea último.

I₂. El orden de los puntos de una recta, es continuo, esto es: si los puntos de la recta se distribuyen en dos clases H y K tales que:

α) todo punto pertenezca a la clase H o a la clase K .

β) todo punto de la clase H , precede a todo punto de la clase K .

Admitiremos la existencia de un punto M de separación de las dos clases, tal que todos los puntos que preceden a M pertenecen a H , y los que siguen a M pertenecen a K .

I₃. El plano es un conjunto de puntos que satisfacen a las condiciones:

α) dos cualesquiera de sus puntos pertenecen a una recta y solamente a una.

β) fuera de una recta existen puntos.

I₄. Toda recta p divide al plano en dos semiplanos tales que:

α) si A y B son puntos que no pertenecen a p , situados en distintos semiplanos, son extremos de un segmento que encuentra a p .

β) si A y B pertenecen al mismo semiplano, el segmento AB no encuentra a p .

§ 4. — Los postulados que se refieren a la noción de congruencia, constituyen un segundo grupo.

Antes de formularlos, es oportuno hacer las consideraciones que siguen.

Llamaremos *transformación* del plano en sí mismo, a una correspondencia biunívoca, que sea dada de un modo cualquiera, entre sus puntos.

Si la transformación S permite pasar del punto A , al punto A' , es decir si es:

$$SA \equiv A'$$

y la transformación T , permite pasar del punto A' al punto A'' o sea:

$$TA' \equiv A''$$

La transformación $TSA \equiv A''$ aplicado primero la S y luego la T , que permite pasar directamente de A a A'' diremos que es el producto de la transformación S por la transformación T .

Sea $G \equiv R, S, T, \dots$, un conjunto de transformaciones, diremos que G , constituye un grupo de transformaciones si se verifica:

α) si R y S son dos transformaciones cualesquiera de G , su producto también pertenece a G .

β) si la transformación T pertenece a G , también pertenece a G , la T^{-1} , transformación inversa de T , luego G , contiene la transformación idéntica que hace corresponder a cada elemento, el mismo elemento.

Una transformación del plano, que hace corresponder a puntos sucesivos de una recta p , puntos sucesivos de una recta p' (p' homóloga de p), diremos que es una *homografía afín*.

Dicho esto, enunciemos el segundo grupo de postulados.

II₁. Los movimientos del plano, son homografías afines, que forman grupo.

II₂. Existe un movimiento del plano, bien determinado, tal que un punto cualquiera P , va a coincidir con un punto P' dado, una semirecta p que pasa por P , en una semirrecta p' que pasa por P' y que transforma un semiplano limitado por p , en uno de los dos semiplanos limitados por p' .

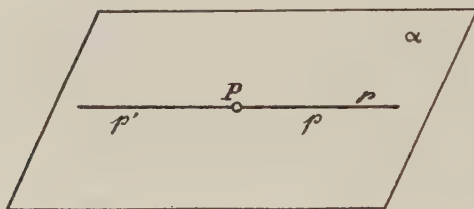
Dos figuras planas, que en un movimiento, se corresponden punto a punto, diremos que son *congruentes*.

El sistema de postulados I₁ . . . I₄ II₁ II₂, permite ya demostrar las veintisiete primeras proposiciones del primer libro de los Elementos de Euclides.

La proposición 27 afirma: « dos rectas coplanares que forman con una tercera, ángulos alternos internos iguales, son paralelas ». El teorema expresa pues, la existencia de una paralela, por un punto exterior a una recta dada.

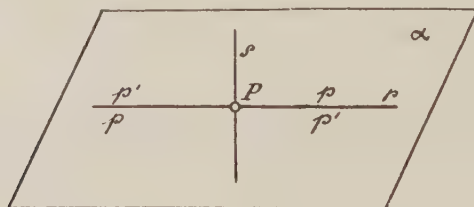
La demostración de la proposición inversa de la antes enunciada, exige introducir un nuevo postulado, el llamado *postulado de Euclides*: por un punto exterior a una recta dada, existe una sola paralela.

§ 5. — *Grupo de los movimientos del plano que conservan fijo un punto P y una recta que pasa por P .* — Sea la recta r en el plano α y P un punto de r ; p y p' las semirrectas opuestas, que sobre la recta r , el punto P determina.



Existen dos movimientos del plano sobre sí mismo, que dejan fijo el punto P y la semirrecta p ; a saber: la identidad y el abatimiento del plano alrededor de r . Ambos movimientos, dejan fijos también, todos los puntos de r .

Existen dos movimientos que transforman p en p' (e inversamente) dejando fijo el punto P . Estos movimientos son:



Abatimiento del plano, alrededor de la recta s perpendicular a p en el plano α y rotación del plano de un ángulo llano, alrededor del punto P .

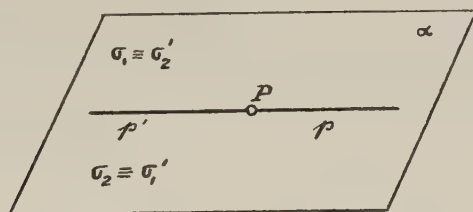
Indiquemos estos movimientos como sigue:

1º Movimiento idéntico: $T_{1,1}$ que deja fijos todos los puntos y en consecuencia las dos semirrectas y los dos semiplanos. Se escribirá:

$$T_{11} \equiv 1 \quad [1]$$

$$T_{11} M \equiv M$$

2º El abatimiento $T_{1,2}$ que deja fijas las dos semirrectas pero cambia los dos semiplanos:

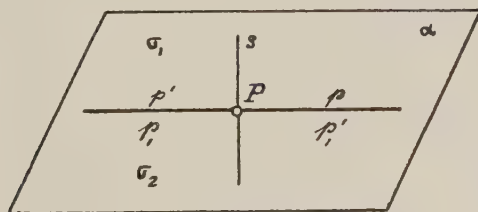


es decir:

$$T_{1,2} \sigma_1 \equiv \sigma_2 \quad [2]$$

$$T_{1,2} p \equiv p$$

3º El movimiento $T_{2,1}$ que deja fijos los dos semiplanos, pero cambia las dos semirrectas:

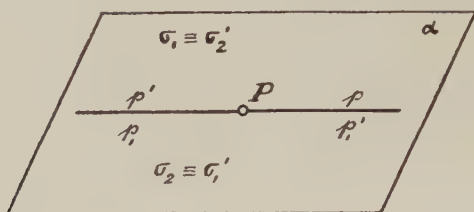


es decir:

$$T_{2,1} \sigma_1 \equiv \sigma_1 \quad T_{2,1} p \equiv p' \quad [3]$$

$$T_{2,1} \sigma_2 \equiv \sigma_2 \quad T_{2,1} p' \equiv p$$

4º El movimiento $T_{2,2}$ que permuta las semirrectas y los semiplanos:



o sea:

$$T_{2,2} \sigma_1 \equiv \sigma_2 \quad T_{2,2} p \equiv p'$$

$$T_{2,2} \sigma_2 \equiv \sigma_1 \quad T_{2,2} p' \equiv p$$

[4]

Sale fácilmente de [2], [3], [4]

$$T_{1,2}^2 \sigma_1 \equiv T_{1,2} \sigma_2 \equiv \sigma_1$$

$$T_{2,1}^2 \sigma_1 \equiv T_{2,1} \sigma_1 \equiv \sigma_1$$

$$T_{2,2}^2 \sigma_1 \equiv T_{2,2} \sigma_2 \equiv \sigma_1$$

de donde:

$$T_{1,1} \equiv T_{1,2}^2 \equiv T_{2,1}^2 \equiv T_{2,2}^2 \equiv 1$$

que nos dice que los cuatro movimientos considerados son involutorios.

Sale también de las relaciones antes recordadas:

$$T_{2,1} T_{1,2} \sigma_1 \equiv T_{2,1} \sigma_2 \equiv \sigma_2 \equiv T_{2,2} \sigma_1$$

$$T_{1,2} T_{2,1} \sigma_1 \equiv T_{1,2} \sigma_1 \equiv \sigma_2 \equiv T_{2,2} \sigma_1$$

$$\dots \dots \dots$$

o también:

$$T_{2,1} T_{1,2} \equiv T_{1,2} T_{2,1} \equiv T_{2,2} \quad \text{etc.}$$

Resulta así, que los cuatro movimientos considerados forman grupo; éste recibe el nombre de grupo trirectángulo.

Se puede pues resumir lo anterior como sigue: la identidad, los abatimientos en torno a una recta dada o en entorno a su perpendicular en P y el medio giro alrededor de P , son las transformaciones que forman el grupo G , de los movimientos del plano, que dejan fijos un punto P y una recta que pasa por él.

§ 7. — *Interpretación métrico-proyectiva de la geometría plana no-euclídea.*

Antes de dar esta representación, convendrá recordar algunas propiedades de la homografía entre planos, así como de la proyectividad entre cónicas de planos homográficos.

Dos planos se dice que son homográficos, si existe una correspondencia biunívoca entre sus puntos y entre sus rectas, de modo que si un punto describe una recta, el punto homólogo, describa una recta. La correspondencia existente entre dos planos homográficos, llámase *homografía*. Una homografía entre dos planos, queda unívocamente determinada, haciendo corresponder arbitrariamente a cuatro puntos independientes ⁽¹⁾ de un plano, cuatro puntos independientes en el otro. La homografía en que a los cuatro puntos A, B, C, D , corresponden ordenadamente, los puntos A', B', C', D' se indica:

$$\Omega \equiv \left(\begin{matrix} A, B, C, D \\ A', B', C', D' \end{matrix} \right)$$

Cabe en particular, considerar la homografía entre dos planos superpuestos. En este caso, pueden existir, elementos unidos, pero para que la homografía no sea idéntica, sólo puede haber tres puntos unidos independientes, o tres rectas unidas independientes.

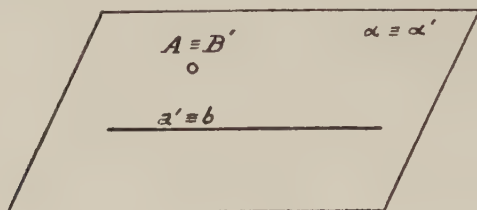
§ 8. — Si la correspondencia entre los planos, es tal que a cada punto le corresponde una recta y a cada recta un punto, y recíprocamente, de modo que si un punto describe una puntual, la recta correspondiente describe un haz de rayos, se dice que la correspondencia es recíproca y la correspondencia existente entre ambos planos, llámase *reciprocidad*.

La reciprocidad entre dos planos superpuestos, es involutoria, cuando un punto y una recta se corresponden en doble modo. Significa esto decir, que cualquiera que sea el punto $A \equiv B'$, las dos rectas a' y b homólogas respectivamente de A y B' coinciden.

Consideremos dos planos superpuestos $\alpha \equiv \alpha'$ y entre ellos una reciprocidad involutoria. Sea K la reciprocidad, que permite pasar de α a α' ; K^{-1} la reciprocidad inversa que hace corresponder α a α' .

(1) Recuérdese que n puntos de un plano son independientes si 3 cualesquiera de ellos no son colineales; n rectos de un plano son independientes, si 3 cualesquiera de ellos no son copuntuales.

Si la reciprocidad es involutoria y A, a' son dos elementos que se corresponden en ella, deberá ser:



$$KA \equiv a' \quad [1]$$

$$Ka' \equiv A$$

$$K^{-1} A \equiv a' \quad [2]$$

$$K^{-1} a' \equiv A$$

Sale de [2]:

$$KK^{-1} A \equiv Ka' \equiv A$$

y de [1]

$$K^2 A \equiv Ka' \equiv A$$

o sea:

$$K^2 \equiv 1$$

que nos dice, que el cuadrado de K es la identidad.

Una *reciprocidad involutoria*, entre dos planos superpuestos, recibe el nombre de *polaridad plana*.

Si un punto y su recta polar se pertenecen se dice que son elementos autoconjugados.

Finalmente, en el plano, se define una cónica, como el conjunto de los puntos o de las rectas autoconjugadas, respecto de una polaridad plana, no uniforme.

La cónica así definida, es la llamada cónica fundamental de la polaridad.

Si entre dos planos α, α' existe una homografía Ω y en el plano α se da una polaridad π , en el plano α' , en virtud de Ω , queda definida una cierta polaridad π' . La π' se puede obtener en la siguiente forma: supongamos que en el plano α se tenga:

$$\pi A \equiv a'$$

es decir A y a' son en el plano α , elementos polares recíprocos respecto de la polaridad π . En virtud de la homografía Ω existente entre α y α' , al punto A y a la recta a' de α corresponderán ordenadamente en α' , el punto A_1 y la recta a'_1 . Pero es posible pasar de A_1 a la recta a'_1 mediante las siguientes operaciones:

$$\Omega^{-1} A_1 \equiv A$$

$$\pi \Omega^{-1} A_1 \equiv \pi A \equiv a'$$

$$\Omega \pi \Omega^{-1} A_1 \equiv \Omega a' \equiv a'_1$$

es decir, la proyectividad $\pi' \equiv \Omega \pi \Omega^{-1}$ hace corresponder al punto A_1 , la recta a'_1 , pues se tiene:

$$\pi' A_1 \equiv a'_1$$

y si como hemos supuesto, la π es una polaridad plana, la π' también lo es:

$$\pi' a'_1 \equiv \Omega \pi \Omega^{-1} a'_1 \equiv \Omega \pi a' \equiv \Omega A \equiv A_1$$

y en consecuencia, la homografía entre dos planos α , α' hace corresponder a una cónica de α , una cónica de α' .

La polaridad π' , se dice que es la *transformada* de la π , mediante la Ω , en el sentido de que la Ω , hace corresponder a dos elementos de α , homólogos en π , dos elementos de α' , homólogos en π' .

Inversamente, la π es transformada de la π' mediante la Ω^{-1} , pues resulta:

$$\Omega A \equiv A_1$$

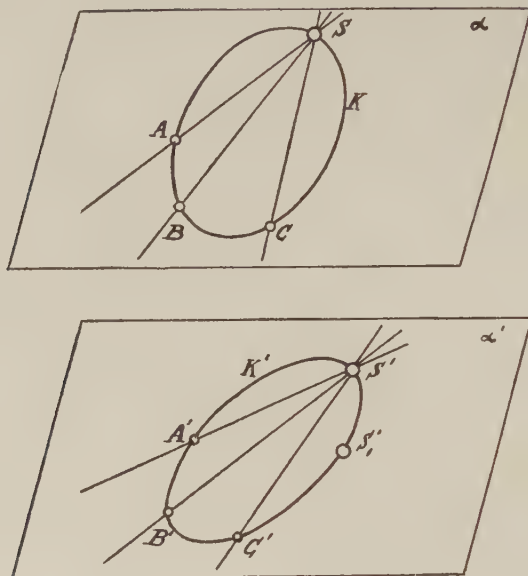
$$\pi' \Omega A \equiv \pi' A_1 \equiv a'_1$$

$$\Omega^{-1} \pi' \Omega A \equiv \Omega^{-1} a'_1 \equiv a' \equiv \pi A$$

$$\pi \equiv \Omega^{-1} \pi' \Omega$$

por cuya razón, se dice que las homografías π y π' son *proyectivas*.

Si K y K' son dos cónicas homólogas en dos planos α, α' homográficos



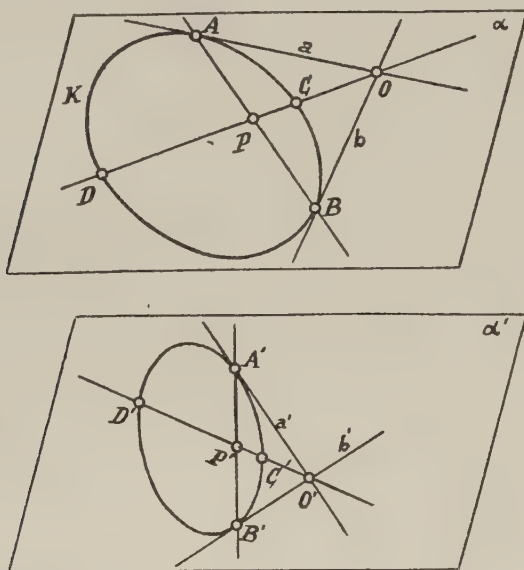
y si S, A, B, C son puntos situados en K , corresponderán sobre K' , en virtud de la homografía los puntos S', A', B', C' ordenadamente y los haces de rayos $S(ABC)$, $S'(A'B'C')$, por ser homólogos en ambas formas planas, resultarán proyectivos, es decir K y K' estarán referidas punto a punto, de tal modo que los haces de rayos, obtenidos proyectando desde dos puntos homólogos, los restantes puntos homólogos, resultan ser proyectivos.

El teorema de Steiner, permite afirmar, que esta propiedad, sigue valiendo, aunque la proyección se haga desde dos punto S, S_1 no correspondientes.

Resulta de aquí, que la proyectividad entre dos cónicas, queda determinada, haciendo corresponder a tres puntos arbitrarios de K , tres puntos arbitrarios de K' . Esta proyectividad, existente entre ambas cónicas, se dice que está subordinada a la homografía existente entre sus respectivos planos.

§ 9. — Sean K y K' dos cónicas situadas respectivamente en sendos planos α, α' .

Existe entre α y α' , una homografía, que a la cónica K le hace corresponder la cónica K' .



Sean a, b , tangentes a K en A y B respectivamente y pongamos $O \equiv ab$. Análogamente, a', b' tangentes a K' en A', B' y $O' = a'b'$. La correspondencia:

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & O \\ A' & B' & C' & O' \end{pmatrix}$$

define una homografía entre α y α' , luego a K corresponde una cónica K_1 que pasa por A', B', C' y que admite como tangentes en A', B' respectivamente, a las rectas a', b' ; se tiene pues: $K_1 \equiv K'$.

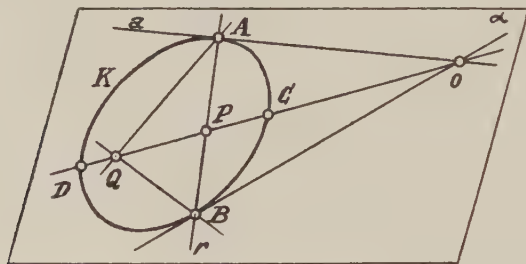
Si con D indicamos la intersección del rayo OC con K y análogamente con D' , la intersección de $O'C'$ con K' , la homografía:

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & O \\ A' & B' & D' & O' \end{pmatrix}$$

hace que también se correspondan K y K' . Si es $P \equiv AB \cdot CD$ y $P' \equiv A'B' \cdot C'D'$, las homografías Ω, Ω_1 , hacen corresponder A con A', B con B' y el punto P sobre la cuerda AB con el P' sobre la cuerda $A'B'$.

Si en particular es $K \equiv K'$ o sea si las cónicas son superpuestas, existen dos transformaciones homográficas, de una cónica en sí misma, que transforma un punto P , interno a K en un punto P' interno a K y al mismo tiempo, dos puntos A, B extremos de una cuerda que pasa por P , en otros dos puntos A', B' extremos de una cuerda que pasa por P' .

§ 10. INTERPRETACIÓN DE LA GEOMETRÍA PLANA NO-EUCLÍDEA HIPERBÓLICA. — Consideremos en un plano α , una cónica real K y construyamos una geometría métrica convencional, interpretando los conceptos primitivos, punto, recta, plano, en la siguiente forma:



Plano $\equiv$ región plana, interior a K .

recta $\equiv$ cuerda de K , sus extremos excluidos.

punto $\equiv$ punto interior a K .

rectas paralelas $\equiv$ cuerdas que se cortan en un mismo punto de K .

puntos sucesivos sobre una recta $\equiv$ puntos sucesivos sobre una cuerda.

movimiento del plano $\equiv$ homografía que transforma la región interna a K , en la misma región.

figuras iguales $\equiv$ figuras que se corresponden en una homografía, que deja K invariada.

Mediante la interpretación que acaba de hacerse, en el «plano» convencional, se verifican los postulados I, II, es decir los postulados de pertenencia, de ordenación, de continuidad y de congruencia, pero el postulado de paralelismo, no se verifica, pues si Q , es un punto interno a K , las rectas QA, QB , son «rectas» según nuestra definición paralelas a la «recta» AB , trazadas por Q .

Puede también observarse, que las rectas QA, QB , determinan dos ángulos completos, tales que, todas las rectas del ángulo QA, QB que contiene la recta QP , cortan a la recta r , todas las rectas que

o sea, la homología armónica, que admite, como eje, la recta $r \equiv AB$ y como centro, su polo $O \equiv ab$, respecto de K . Esta homología define el «rebatimiento» alrededor de la recta $r \equiv AB$.

3º El «rebatimiento» $\Omega_{2,1}$ que deja fijos los «sempianos» σ_1, σ_2 , pero permuta las dos «semirrectas» PA, PB , definido por la homografía:

$$\Omega_{2,1} \equiv \begin{pmatrix} ABCO \\ BACO \end{pmatrix}$$

esto es, la homología armónica, que admite como eje, la recta CD , polar conjugada de AB , y como centro, su polo O_1 , respecto de la cónica K .

Esta homografía define el «rebatimiento» alrededor de la recta OC .

4º El «movimiento» $\Omega_{2,2}$ que permuta las dos «semirrectas» PA, PB , y los dos «sempianos» σ_1, σ_2 definidos por la correspondencia:

$$\Omega_{2,2} \equiv \begin{pmatrix} ABOC \\ BAOD \end{pmatrix}$$

Esta homografía, es la homología armónica que tiene como centro el punto P y por eje, la recta p , polar de P , respecto de la cónica K y representa una «rotación» de medio giro, alrededor del punto P .

Puede observarse que en todos estos «movimientos» que acaba de indicarse, la recta OC , polar conjugada de la AB , queda invariada, teniendo la misma propiedad de la perpendicular a una recta del plano, para los movimientos análogos. Esto conduce por lo tanto a definir como perpendicular a la «recta» AB , a toda recta que le sea polar conjugada.

Se deduce de aquí que en nuestro «plano» convencional, existen infinitas perpendiculares a una recta dada: serán todas las rectas que pasen por su polo; pero por un punto, no existe más que una sola perpendicular.

El punto O , común a las perpendiculares a nuestra «recta» es un punto «impropio» que por no estar contenido en el «plano» se llama «punto impropio ideal».

§ 12. LA DISTANCIA DEL PLANO NO-EUCLÍDEO. — La distancia entre dos puntos P y Q , en el plano no-euclídeo y análogamente, el

ángulo de dos rectas p, q , concurrentes en un punto, se puede definir, de modo que se cumplan las condiciones siguientes:

a) La distancia debe ser un invariante, respecto del grupo de los movimientos.

b) La distancia debe gozar de la *propiedad aditiva*, es decir, si el « segmento » PR , es suma de los segmentos PQ y QR , la distancia PR , debe ser igual a la suma de las distancias de PQ y de QR .

Si en base a estas propiedades, se quiere definir la distancia de dos puntos P y Q , en la métrica proyectiva, relativa a una cónica real K , considérense los puntos A, B , en que la recta PQ , corta a K .

Un invariante del par de puntos PQ , respecto de las homografías (movimientos) que transforman la K en sí misma, está dado por la razón anarmónica:

$$r = (ABPQ).$$

Importa hacer notar, que todo otro invariante del par PQ , respecto de las homografías consideradas, es función de dicha razón doble. Pero puede observarse que la razón doble mencionada no goza de la *propiedad aditiva*, sino de la *propiedad multiplicativa*.

En efecto, si P, Q, R , son tres puntos colineales, se tiene:

$$(ABPQ) = \frac{(ABP)}{(ABQ)}$$

$$(ABQR) = \frac{(ABQ)}{(ABR)}$$

y multiplicando ordenadamente sale:

$$(ABPQ).(ABQR) = \frac{(ABP)}{(ABR)} = (ABPR).$$

Por si de esta última igualdad tomamos logaritmos, resulta:

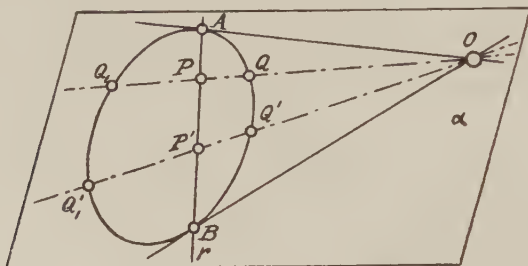
$$\text{Log } (ABPQ) + \text{Log } (ABQR) = \text{Log } (ABPR)$$

y en éste caso, la propiedad aditiva, quedará satisfecha; resultado que nos conduce a tomar como « distancia » PQ , un número proporcional a $\text{Log } (ABPQ)$. Del mismo modo, el ángulo de dos rectas p, q , concurrentes en un punto, se definirá por el $\text{Log } (abpq)$, siendo a, b , las rectas tangentes imaginarias conjugadas, trazadas a la cónica K , desde el punto de concurrencia p, q .

§ 13. « MEDIDA » DE UN SEGMENTO, RESPECTO DE UN SEGMENTO UNITARIO. — En la geometría ordinaria, el concepto de longitud nace no sólo del postulado de Arquímedes, sino del concepto de segmentos iguales, y de los postulados de congruencia.

Puesto que en nuestro plano convencional, valen los postulados de congruencia y de continuidad y por tanto el de Arquímedes, que es una consecuencia de aquél, será posible establecer el concepto de longitud en nuestro « plano ».

Para ello, consideremos una cónica real K , y una « recta », AB ; sobre esta recta consideremos el segmento PP' .



Se puede ver, que existe un « movimiento » perfectamente determinado, que deja fija la cónica K , así como la recta AB , conjuntamente con los semiplanos limitados por AB . Este « movimiento » no es sino, el que está definido por la homografía:

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} ABOQ \\ ABOQ' \end{pmatrix}$$

siendo Q y Q' las intersecciones, respectivamente de las rectas OP , OP' con la cónica K .

La homografía Ω , subordinada sobre la recta AB , una « congruencia » en la cual los puntos A y B son unidos y en que a P , le corresponde P' .

Se trata de una « congruencia » concorde, puesto que los puntos P, P' y el par A, B , de elementos unidos, no se separan. Significa esto, que al segmento BP , que contiene el punto P' , la Ω , hace corresponder el segmento BP' , totalmente contenido en el anterior. De aquí se deduce, que las potencias sucesivas de Ω , harán corresponder al punto P , los puntos $P', P'', P''', \dots$ que se sucederán en el sentido $PP'B$, sobre el segmento PB , interior a K y como la Ω , para cualquier valor entero de n , no se reduce a la identidad, la sucesión $P, P' P'' \dots$ será infinita.

Se comprende ahora, que siendo los segmentos PP' , $P'P''$, $P''P'''$, etcétera, cada uno, transformado del anterior, mediante la Ω , es decir, mediante el « movimiento » de nuestro plano no-euclídeo, dichos segmentos deberán ser considerados « iguales » por definición, y en consecuencia se podrá escribir:

$$PP^{(n)} = n \cdot PP',$$

donde $P^{(n)}$ es el transformado de P , mediante Ω^n , esto es:

$$\Omega^n P \equiv P^{(n)}.$$

Es decir, el número entero n , podrá considerarse como « medida » del segmento $PP^{(n)}$ respecto de la unidad PP' .

Se tiene además, que sobre la « recta » AB , es posible encontrar un segmetno que tenga por medida, un número entero dado arbitrariamente grande o en otros términos, la « recta » de nuestro « plano » es una línea de « longitud » infinita.

Veamos ahora, cómo puede encontrarse una expresión analítica de la longitud de un « segmento » cualquiera PK , de la « recta » AB , en función de la razón anarmónica $(ABPK)$.

Pongamos:

$$(ABPP') = u$$

siendo u , un número real y positivo; en estas condiciones, el punto K , tal que:

$$(ABPK) = u^n$$

donde n , es un número entero y positivo, está perfectamente determinado y el « segmento » PK , será el « múltiplo » según el número n del « segmento » PP' .

La homografía Ω , hace corresponder a la cuaterna $ABPP'$, la cuaterna $ABP'P''$ y por ser:

$$ABPP' \nabla ABP'P''$$

se tendrá:

$$(ABPP') = (ABP'P'') = u$$

Como además se tiene:

$$\Omega P \equiv P'$$

$$\Omega^2 P \equiv P''$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Omega^n P \equiv P^{(n)}$$

se podrá escribir:

$$(ABPP') = \frac{(ABP)}{(ABP')} = u$$

$$(ABP'P'') = \frac{(ABP')}{(ABP'')} = u$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(ABP^{(n-1)}K) = \frac{(ABP^{n-1})}{(ABK)} = u$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades resulta:

$$\frac{(ABK)}{(ABP)} = (ABPK) = u^n$$

$$\text{Log } (ABPK) = n \cdot \text{Log } u = n \cdot \text{Log } (ABPP')$$

es decir:

$$\text{« distancia » } PK = n \cdot \text{« distancia » } PP'$$

y el segmento PK , así obtenido, es el « múltiplo » según n de PP' .

El segmento « submúltiplo » según n de PP' , será el segmento PK tal que:

$$(ABPK) = u^{\frac{1}{n}}$$

es decir:

$$\text{Log } (ABPK) = \frac{1}{n} \cdot \text{Log } v = \frac{1}{n} \text{Log } (ABPP')$$

en este caso, el punto K , será el transformado de P , según la potencia — n de Ω , es decir, será:

$$\Omega^{-n}P \equiv K$$

y en consecuencia, queda bien determinado.

El punto K tal que:

$$(ABPK) = u^{\frac{m}{n}}$$

se determinará en la siguiente forma: determinamos primero K_1 por la condición

$$\Omega^m P \equiv K_1$$

y en seguida K , como sigue:

$$K \equiv \Omega^{-n} K_1 \equiv \Omega^{-n} \Omega^m P \equiv \Omega^{m-n} P.$$

El « segmento » PK , determinado en la forma que acabamos de indicar, tendrá por medida, el número racional $\frac{m}{n}$, respecto de la unidad PP' .

Si finalmente se pone:

$$(ABPK) = u^r$$

siendo r , un número real positivo, se podrá determinar los puntos $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots, K'_1, K'_2, \dots, K'_n, \dots$ que preceden y que siguen al punto K y cuyas medidas son los números racionales $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m'_1}{n'_1}$ etc. El elemento de separación de las sucesiones (K_n, K'_n) corresponderá al número real r .

Escribamos ahora:

$$v = \text{Log } (ABPP') = \text{Log } u.$$

De la igualdad:

$$(ABPK) = u^r$$

sale:

$$r = \frac{1}{\text{Log } u} \cdot \text{Log } (ABPK) = \frac{1}{r} \cdot \text{Log } (ABPK)$$

como expresión de la longitud del segmento PK , respecto del segmento unidad PP' .

§ 14. INTERPRETACIÓN DE LA GEOMETRÍA DE RIEMANN COMO GEOMETRÍA DE LA RADIACIÓN. — Considérese una radiación de centro propio O :

$$O \equiv a, b, c, \dots \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

e interpretemos los conceptos fundamentales, punto, recta y plano, en la siguiente forma:

punto $\equiv$ una recta cualquiera de la radiación.

recta $\equiv$ haz de rayos $O_w \equiv a, b, c, \dots$ contenido en un plano w cualquiera de la radiación de centro O .

plano $\equiv$ la radiación de centro propio O .

Como « involución absoluta » de nuestro plano, tomemos la polaridad ortogonal de la radiación, esto es, la polaridad que hace corresponder a cada recta a o a cada plano α de O , respectivamente, el plano α' ortogonal a a , la recta a'' ortogonal a α .

Finalmente, como « movimiento o congruencia » consideremos los movimientos de la radiación alrededor de su propio centro O , es decir, movimientos que transforman la radiación en sí misma.

Estos movimientos, como es fácil verlo, dejarán invariante la polaridad ortogonal de O , es decir, nuestra involución absoluta.

Como resulta fácil verificarlo, para nuestro plano, y para nuestras rectas, quedan satisfechos los postulados de los grupos I, II, pero no el postulado de Euclides; éste no se cumple, pues dos « rectas » se cortan siempre, según un « punto » o lo que es lo mismo, según nuestra convención, dos haces de rayos:

$$O_w \equiv a, b, c, \dots$$

$$O_{w'} \equiv p, q, r \dots$$

admiten siempre como rayo común, el rayo $l \equiv w . w'$, intersección de los planos w y w' .

Sobre un plano α , puede también interpretarse la geometría no-euclídea de Riemann, estableciendo entre α y la radiación de centro O , una homografía Ω que haga corresponder a la polaridad uniforme de α , esto es, a la cónica imaginaria K , definida por dicha polaridad, la polaridad ortogonal de la radiación de centro O .

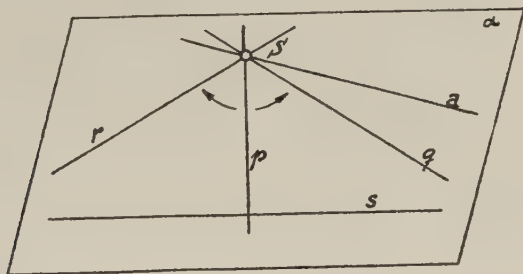
§ 15. LA GEOMETRÍA PROYECTIVA, INDEPENDIENTE DEL POSTULADO DE EUCLIDES. — Una vez rechazado el postulado de Euclides, se ha visto que eran posibles al menos dos hipótesis; una conducía a la

existencia de la geometría no-euclídea hiperbólica, otra a la existencia de la geometría no-euclídea elíptica. Cabe ahora preguntar: ¿es posible alguna otra hipótesis ulterior?

La respuesta es negativa: negado el postulado de las paralelas, las únicas hipótesis posibles, son las que conducen al caso hiperbólico o al caso elíptico.

De cómo esta afirmación sea posible, resulta de las siguientes consideraciones:

Consideremos una recta s y un punto S que no se pertenezcan, en un plano α .



En el plano α , solo caben las hipótesis:

1º toda recta por S corta a la recta s .

2º existe por lo menos una recta por S que no corta a s .

En el caso 1º, se trata de la geometría de Riemann, en el 2º caso sea a la recta por S que no encuentra a s . Tracemos por el punto S una recta p , perpendicular a s . De los dos ángulos completos pa , consideremos el que describe p , hasta superponerse a a según una rotación indicada por la flecha.

Entre todos los rayos interiores a este ángulo, hagamos la siguiente clasificación en dos clases H, K .

En la clase H , incluimos todos los rayos que encuentran a s , en la clase K , todos los restantes.

El rayo p , pertenece a la clase H , el rayo a a la clase K . Las clases así construídas, satisfacen a las condiciones que impone el postulado de continuidad, luego existirá un rayo q , que en el sentido indicado para las rotaciones, sigue a todos los rayos de la clase H y precede a todos los rayos de la clase K .

Del mismo modo, en el semiplano limitado por p , opuesto al antes considerado, se demostraría la existencia de un rayo r , tal que todo

rayo por S que precede a r , según una rotación opuesta a la indicada por la flecha, encuentra a s y todo rayo que lo sigue, no encuentra a s .

Resumiendo lo que antecede se tiene: todo rayo por S interior al ángulo completo $\widehat{qr}$ que contiene a p , encuentra a la recta s , todo rayo exterior a dicho ángulo no encuentra a s .

Resulta que por el punto S y en el plano α , existen dos paralelas q y r a s y además, la existencia de infinitas rectas no secantes a s , o sea estamos en el caso de la geometría de Lobatchewski.

En el caso particular de que $q \equiv r$, no existiría más que una paralela a s por el punto S , es decir, caeríamos en el caso euclideo.

De las consideraciones que preceden, resulta que tanto la geometría euclídea, como las geometría no-euclídeas de Riemann y de Lobatchewski están subordinadas a la Geometría Proyectiva.

Este resultado, nos permite afirmar:

La Geometría Proyectiva, es independiente del postulado de Euclides.

BIBLIOGRAFIA

- BONABA, R. *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee*. (Questioni Riguardanti. Le Matematiche Elementari. F. Enriques). Vol. II. Part. 1ª.
- ENRIQUES, F. *Lezioni di Geometria Proiettiva*. 4ª edición. Editor: N. Zanichelli. Bologna 1920.
- ENRIQUES, F. *Conferenze sulla Geometria Non-Euclidea*. 1er. curso del Dott. Olegario Fernández. Editor: N. Zanichelli. Bologna.
- SEVERI, F. *Geometria Proiettiva*. Editor: «La Litotipo». Padova, 1921.
- YOUNG, JOHN WESLEY. *Projective Geometry*. (The Carus Mathematical Monographs.). Chicago, 1930.

REGLAMENTOS PARA ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

Por OTTO GOTTSCHALK

La Reglamentación.—Difícilmente se encontrará en el mundo científico o técnico y particularmente entre las materias de aplicación práctica diaria un objeto sobre el cual difieran tanto los criterios como respecto al mejor modo de garantizar la seguridad de resistencia de estructuras de hormigón armado. A pesar de toda clase de estudios y ensayos llevados a cabo durante los últimos 40 años las conclusiones, siguen cristalizadas en los varios reglamentos y resultan tan distintas que por ejemplo para una columna que en una parte del mundo se cargaría con 100 toneladas en otra parte, aunque proyectada y ejecutada en forma idéntica, se admitiría el doble o sea 200 toneladas. Para explicar y apreciar semejante disparidad es necesario conocer desde sus comienzos la forma en que se desarrolló el hormigón armado en los varios ambientes, el criterio con que se han compuesto los reglamentos y el caudal de experiencia y ensayos sobre que se basan.

Mientras que el hierro y el acero se entregan en la obra en condiciones de resistencia bien definidas el hormigón se fabrica en la obra misma y su calidad y resistencia junto con la armadura de hierro dependen de un sinnúmero de condiciones locales de materiales y de ejecución, cuya influencia se aprecia de un modo distinto en distintos territorios y resulta tanto más difícil uniformar criterios cuanto más grande resulte un territorio y más variadas las condiciones.

Aparte de semejantes condiciones locales produce divergencias fundamentales el modo distinto de interpretar y aplicar los resultados de los ensayos. En los comienzos del hormigón armado era bien común cargar losas, vigas y columnas hasta la rotura y derivar de los resultados así obtenidos las tensiones admisibles. Se refleja este criterio en la teoría común de hoy día, que prescinde de la resisten-

cia en tracción del hormigón «debajo» del eje neutro en los elementos de estructura, solicitados a la flexión (fig. 1^b), lo que no resulta cierto hasta que falle la pieza cargada.

Más se acercaba a las condiciones en la estructura mientras todavía resistía, el método de Ritter, (fig. 1^a) de calcular los momentos de resistencia W y de inercia I con todo el hormigón de la sección homogenizada, aplicándolos igual como en tirantes y vigas de hierro; sin embargo este método fué abandonado como también la consideración del hecho que el módulo de elasticidad E_b del hormigón

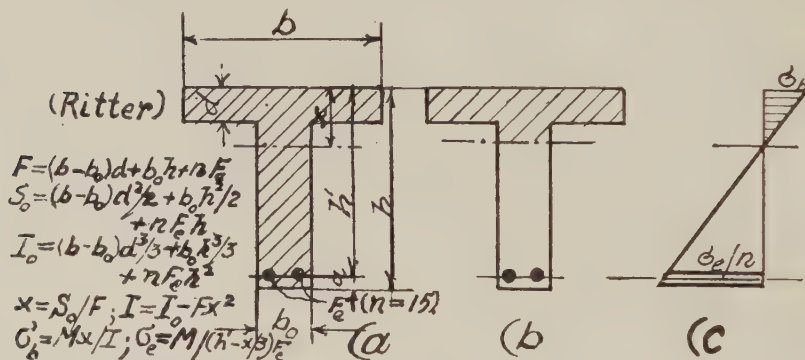


Fig. 1: Viga T en flección.

no es constante sino disminuye con el aumento de la tensión resultando más o menos de $E_b = 300.000/\sigma_b^{0.15}$ según ensayos de la época, de Bach, de modo que secciones planas no quedan planas (fig. 1^c) en flexión según generalmente se supone según Hooke. Como la teoría corriente en relación a las dos hipótesis más correctas mencionadas yerra por el lado de mayor seguridad no habrá necesidad de cambiarla por el momento.

Más profunda sin embargo resulta la divergencia de criterios para las columnas, especialmente respecto a la eficacia de los zunchos, cuya importancia parece haberse exagerado en muchas partes en el pasado. A todo parecer en la columna resistente en la obra la actuación de los zunchos es de relativamente poca consideración y recién cuando cede el hormigón entran en acción los zunchos a manera de un caño conteniendo un líquido comprimido, de modo que hasta al hormigón más pobre y más blando corresponde mayor eficacia de la hélice (¹). Bajo este concepto no sería admisible pues basar las car-

(¹) V. EMPERGER, *Beton, u. Eisen*, 1923, p. 117.

gas sobre resultados obtenidos en ensayos a rotura, sino considerando las columnas sin desperfectos aún, en la forma en que actúan en la estructura resistente. Concuerdan con este criterio las últimas recomendaciones del 25 de Febrero 1936 en Chicago, del American Concrete Institute, afianzadas por imponentes series de ensayos con columnas de tamaño natural en varias Universidades de los Estados Unidos como nunca antes se han realizado.

Finalmente, la tercera consideración que influye poderosamente en la redacción de los reglamentos es si deben servir a propósitos de fiscalización solamente, para obtener la mayor garantía posible de una obra segura o si se desea estimular al mismo tiempo la aplicación del hormigón armado en vista de sus altas calidades de rigidez y durabilidad; donde influye el último criterio se tratará de reducir lo más posible las dimensiones en los proyectos imponiendo en cambio una inspección más científica y rigurosa en la obra. Este medio se ha empleado especialmente para hacer posible usar el hormigón armado, donde de otra manera no hubiera podido competir con las estructuras de hierro o, en la actualidad, de acero de alta resistencia.

Todo lo que antecede es de interés especial ahora en vista de que en la Capital Federal se ha reglamentado el hormigón armado en el «Reglamento Técnico para estructuras Metálicas y de Hormigón Armado», Municipalidad de Buenos Aires, 1935. Mientras los reglamentos del hemisferio Norte generalmente abarcan países enteros con todas sus variedades de materiales y condiciones locales el reglamento de Buenos Aires rige en la metrópoli únicamente, lo que naturalmente facilita mucho la reglamentación uniforme. Gozamos dentro de la Capital de una uniformidad y calidad de materiales alcanzadas en pocas partes del mundo; la arena oriental, la piedra limpia, el Cemento Portland sujeto a la aprobación de las Obras Sanitarias de la Nación son propicias para la resistencia uniforme y segura del hormigón.

Por otra parte no conviene, dentro de nuestro ambiente, extremar la inspección oficial de la ejecución de los trabajos de modo que cada obra en la gran urbe quedara bajo la fiscalización continua de la administración pública. Semejante medida exigiría una organización de personal tan vasta que su gasto resultaría afuera de toda relación con las posibles economías que puede redundar a la industria constructora, máxime en vista que el monto de la edificación dentro de la metrópoli fluctúa en manera tan brusca.

Entre nosotros indudablemente conviene dejar la mayor responsabilidad posible a la seriedad y competencia de los ejecutantes, las que de paso no se miden por el capital con que se afirma girar ni por los títulos universitarios que se ostenten según continuamente prueban los accidentes. Entre nosotros una función primordial del reglamento es establecer una base mínima de exigencias, igual para todos, que asegure un buen margen de seguridad y la inspección ocasional en la obra para comprobar la buena ejecución, sin retardar el progreso de la obra.

La parte hormigón armado del Reglamento de Buenos Aires se basa esencialmente en el reglamento alemán del año 1935, que a nuestro conocimiento es el más optimista de todos, resultado de un largo desarrollo metódico de reglamentación y fiscalización, y hasta lo excede en liberalidad. Es de esperar pues que en parte el reglamento volverá por el momento hacia un mayor margen de seguridad, lo que ha sido tomado en cuenta en las notas que siguen:

Losas con armaduras cruzadas. — Son las losas de armadura cruzada una de las formas más apropiadas y eficientes a que se presta en cuanto a resistencia el hormigón armado y se adoptó para el cálculo de su resistencia el método de tejidos de Marcus que da dimensiones reducidas. Por razones de la aplicación práctica se recomendaría aumentar en 1 o 2 cm. el espesor que resulte de los cálculos aritméticos, sin embargo siempre respetando los espesores útiles mínimos ya estipulados y que son los siguientes: $x/50$ en tramos libres, $x/60$ en losas continuas o empotradas, siendo x el largo menor del ambiente rectangular $x \times y$.

Sobre un rectángulo $x \times y$ cargado con $q \text{ kgm}^{-2}$, siendo el vínculo el mismo en ambas direcciones, se supone que q se divide en q_x y q_y de modo que

$$q_x/q = y^4/(x^4 + y^4) \quad \text{y} \quad q_y/q = x^4/(x^4 + y^4)$$

Sin embargo semejantes fórmulas pueden sustituirse por las expresiones más sencillas

$$q_x/q = 3/2 - x/y, \quad q_y/q = x/y - 1/2,$$

que dan idénticos resultados dentro de $1/2 < x/y < 1$.

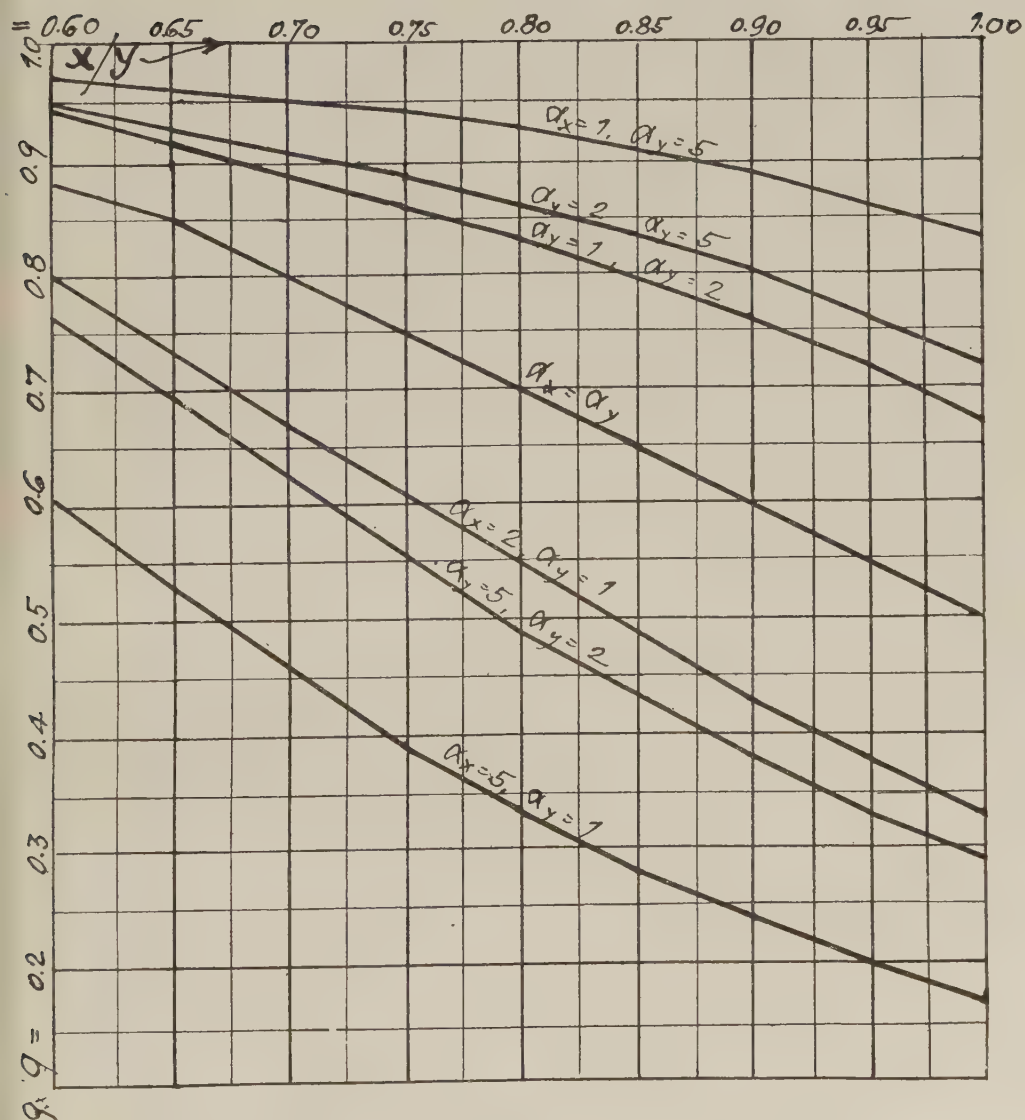


Fig. 2: Distribución de cargas en losas cruzadas.

Cuando los vínculos son distintos se multiplica, según el reglamento x^4 o y^4 con 5 cuando los dos extremos son libres, con 2 cuando empotrado uno de los dos lados y con 1 cuando los dos extremos son

empotrados. Con excepción del caso, que en una dirección ambos extremos son libres y al mismo tiempo en la otra los dos empotrados, podemos sustituir

$$q_x/q = 3/2 - v_x x/v_y y, \quad q_y/q = v_x x/v_y y - \frac{1}{2},$$

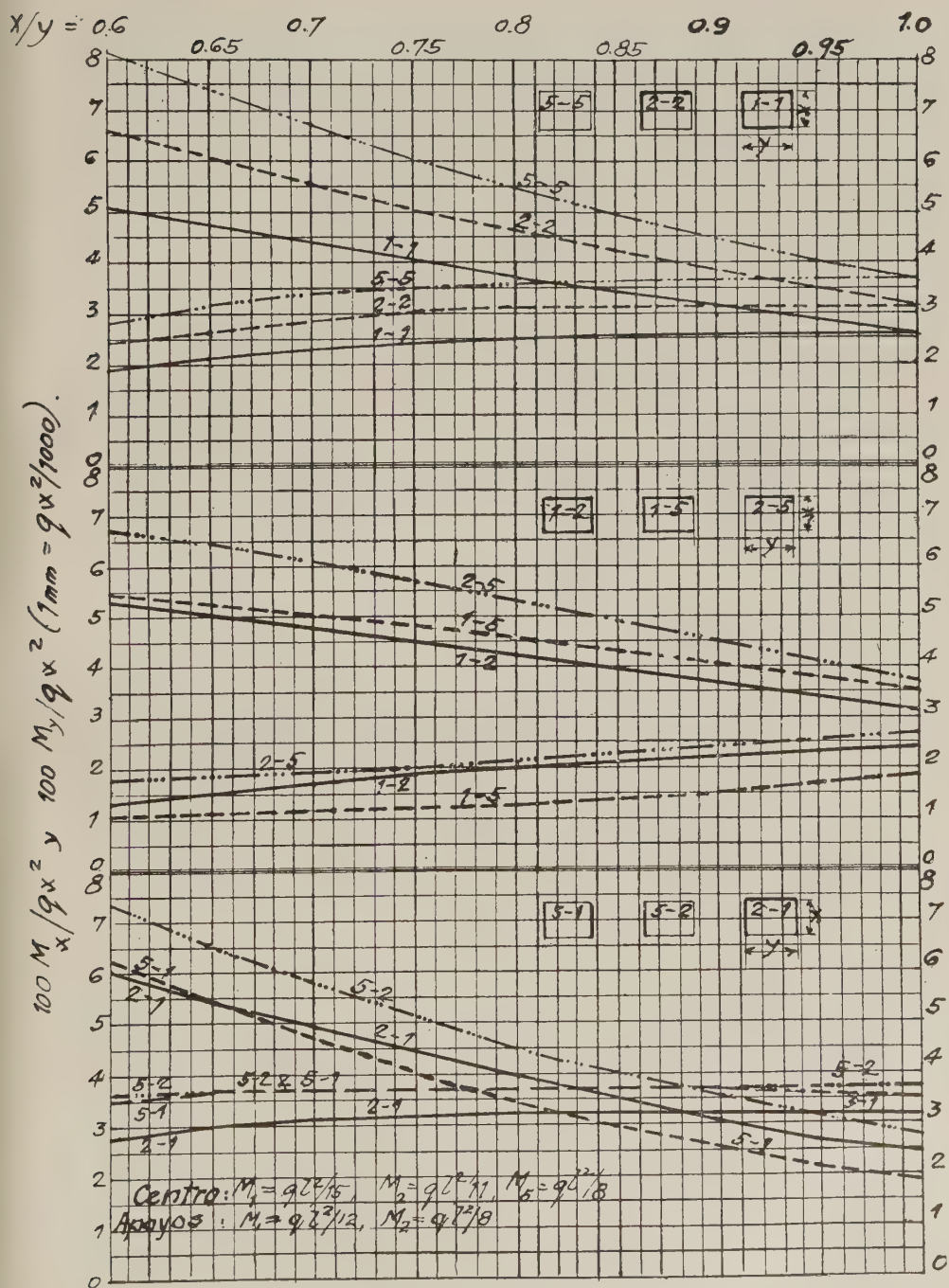
donde $v = 1,5$ cuando ambos extremos son simples, $v = 1,2$ cuando uno es simple y el otro empotrado, $v = 1$ cuando ambos extremos son empotrados. En los diagramas de la fig. 2 se enseña q_x/q para las varias combinaciones de vínculos posibles.

En cambio los diagramas de la fig. 3 indican ya los momentos flectores M_x/qx^2 y M_y/qx^2 , vale decir en el cuadro superior siendo los vínculos los mismos en ambas direcciones, en el cuadro medio cuando son más rígidos en la dirección más corta y en el cuadro inferior cuando más rígidos en la dirección de mayor largo. Prescindiendo de la formación de cartelas, que muchas veces molestan en la arquitectura moderna, se han supuesto los momentos flectores $M_{max}/ql^2 = 1/8, 1/11$ o $1/15$ para tramos libres, exteriores o interiores respectivamente, tal como especifica el reglamento.

Son también muy útiles para el cálculo de losas con armadura cruzada tablas como las de Castiñeiras ⁽²⁾ que además de las cargas repartidas consideran el caso de una carga concentrada en el centro de la losa; estas tablas, igual como aquellas del «Beton Kalender», cuentan con momentos flectores $M_{max}/ql^2 = 1/8, 9/128$ y $1/24$ en el centro de losas libres, semiempotradas y empotradas respectivamente y con $M/ql^2 = 0, 1/8$ y $1/12$ en los apoyos. Cuando la carga no está concentrada del todo sino repartida sobre un rectángulo reducido $x' \times y'$ se recomienda reducir los momentos flectores obtenidos para cargas concentradas multiplicando con $x/(x + 2x')$ los M_y y con $y/(y + 2y')$ los M_x .

Losas con ladrillos huecos. — Conviene estimular el empleo junto con el cemento armado de ladrillos de toda clase, porque siempre representan un elemento más agradable en las construcciones que el hormigón puro, amenguando sus defectos de buen conductor de sonido y variaciones de temperatura. Trata el reglamento esta forma útil como «losa nervurada» y le exige un recubrimiento superior

(2) «El cálculo de losas de horm. arm. con armaduras cruzadas», por el Ing. JULIO R. CASTIÑEIRAS, Centro de Estudiantes de Ingeniería, Buenos Aires, 1930.


 Fig. 3: Momentos flectores en $q x^2 / 100$ de losas cruzadas.

de mínimo 5 cm. Semejante mínimo de espesor de la capa protectora y de compresión sin duda está justificada donde se obtienen los vacíos entre nervaduras por medio de cofres de madera, que luego se retiran; en cambio con ladrillos bien mojados antes de vaciar el hormigón y que quedan en su sitio en unidad con el mismo, $2\frac{1}{2}$ a 3 cm. para recubrimiento son suficientes, según lo han probado más de 30 años de aplicación práctica. Resulta así la losa combinada estáticamente y económicamente más favorable.

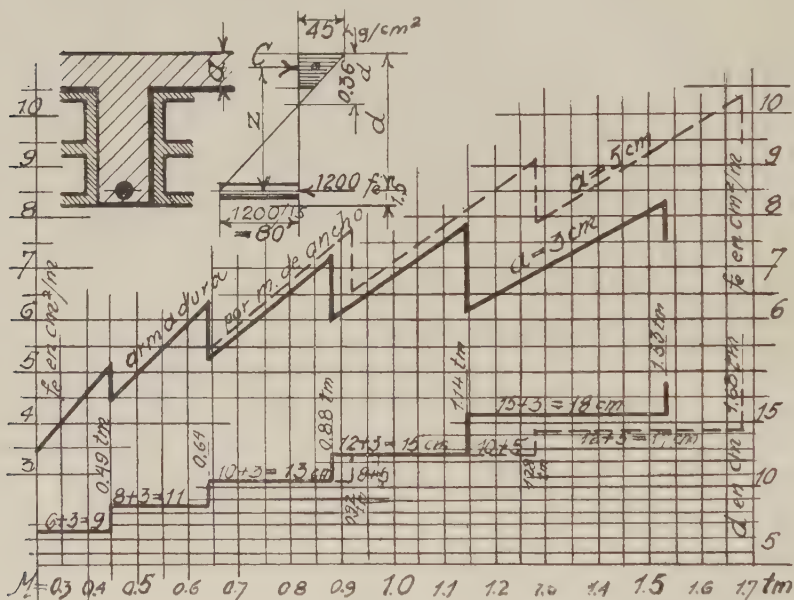


Fig. 4: Losas con ladrillos huecos.

Para que en una capa así reducida de espesor no se exceda la compresión máxima $s_b = 45 \text{ kg/cm}^2$ admitida hay que aumentar la altura de la losa conforme con los cálculos que siguen. Para el momento flector máximo que produce $s_b = 45 \text{ kg/cm}$ y $s_e = 1200 \text{ kg/cm}^2$, cuya elongación de fierro es equivalente a 80 kg/cm^2 del hormigón, el eje neutro (fig. 4) dista de la cara de compresión de la losa en

$$x = 45 d / (45 + 80) = 0.36 d.$$

La tensión pues en la cara baja del recubrimiento resulta

$$s_b = 45 (1 - a/0,36 d)$$

y la compresión total por unidad de ancho de la losa

$$C = 45 a (1 - a/0,72 d),$$

siendo a el espesor del recubrimiento.

El centro de gravedad de la compresión queda de la cara superior a una distancia

$$\frac{a}{3} \cdot \frac{2 s_a + s_b}{s_a + s_b}$$

y la palanca de la cupla de compresión y tracción en la sección resulta

$$z = d - \frac{a}{3} \frac{3 d - 5,6 a}{2 d - 2,8 a},$$

o sea con $a = 3$ cm. $z = d - (3 d - 16,7)/(2 d - 8,3)$. Luego para una faja de losa de 100 cm. de ancho $M = Cz$, siendo

$$C = 100 \times 45 \times 3 (1 - 1/0,24 d) = 13500 (1 - 1/0,24 d)$$

y la armadura cada 100 cm.

$$f_e = C/1200 \text{ en cm}^2 = 11,25 (1 - 1/0,24 d).$$

En los diagramas inferiores de la fig. 4 se muestran los momentos flectores máximos admisibles para los varios espesores de losas de acuerdo con los espesores de ladrillos huecos según generalmente se fabrican acá y en los diagramas superiores la armadura f_e exigida por metro de ancho de losa para semejantes momentos. Las líneas continuas se refieren a un recubrimiento de 3 cm. y las cortadas a 5 cm.; según fácilmente se verá resulta el espesor de 3 cm. más favorable estáticamente y exige considerablemente menos fierro que aquel de 5 cm.

Vigas. — Dado un cierto momento flector queda para las dimensiones de las vigas un número ilimitado de variaciones, sin embargo por razones de economía se elegirá generalmente la altura de modo que la armadura quede dentro de 1 % y 2 ½ % de la sección rectangular del hormigón.

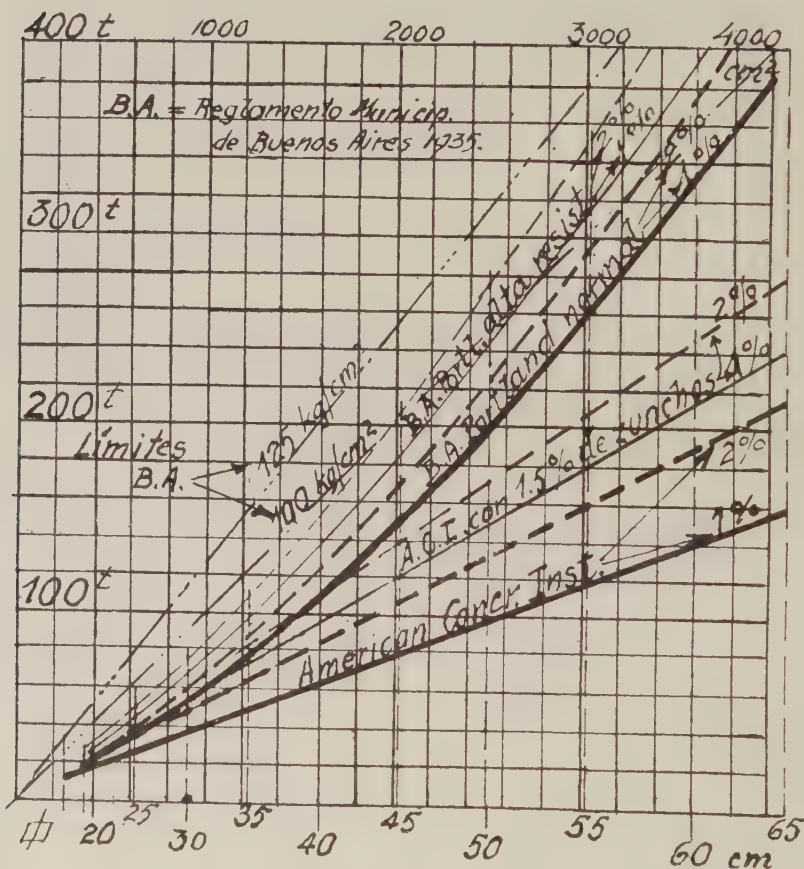


Fig. 5: Cargas en columnas con 1 % y 2 % de armadura longitudinal.

El ancho mínimo de la viga resulta del límite de tensión total en corte, admitida hasta 14 kg/cm^2 ; como sin embargo porosidades u otros posibles desperfectos de ejecución reducen la resistencia en corte mucho más en vigas estrechas que en vigas anchas parece conveniente admitir en vigas de menos que 14 cm. de ancho una tensión en corte solamente igual al ancho en cm., de modo que en una viga de 8 cm. de ancho el corte total no debe exceder 8 kg/cm^2 .

Respecto a la armadura en corte por estribos y barras dobladas conviene recordar que en las vigas comunes el total de la sección de semejante armadura por un lado de la viga no debe ser menor que la armadura en tracción exigida en el centro y apoyo respectivo de la viga. ⁽³⁾.

Columnas. — En la fig. 5 se muestra gráficamente la carga que es admisible para cierta sección del hormigón calculando según el nuevo reglamento de la Capital en comparación de las normas adoptadas en los Estados Unidos con y sin zunchos. En aquellos diagramas de la fig. 5 que corresponden a nuestro reglamento no se han tomado en cuenta zunchos ningunos, ya que sin aquellos se llega a exceder el límite total de 100 kg/cm^2 estipulado.

En los diagramas de la fig. 6 se indican las cargas que las columnas pueden soportar, proponiéndose una compresión de $s_b = 30 + d/2 \text{ kg/cm}^2$ para las columnas de no menos que $d = 20 \text{ cm}$. de espesor. Así en una columna $30 \times 30 \text{ cm}$. se admitirán en el hormigón 45 kg/cm^2 .

Para facilitar la mejor adaptación de columnas de hormigón armado a los proyectos de Arquitectura convendría admitir columnas aún menores de $20 \times 20 \text{ cm}$. siempre que se pruebe que en el piso respectivo existan columnas más gruesas u otras estructuras de hormigón armado que soportan ampliamente la presión del viento u otras posibles fuerzas laterales en el momento del descimbramiento, sin contar con la rigidez de los trabajos posteriores de albañilería. La compresión en el hormigón de semejantes columnas de espesor reducido no debe exceder $s_b = d^2/10$ y la armadura mínima será igual o equivalente a $4 \varnothing 12 \text{ mm.} = 4.52 \text{ cm}^2$. Por ejemplo en una columna de $15 \times 15 \text{ cm}$. la compresión en el hormigón no debe exceder $22,5 \text{ kg/cm}^2$, con la que su carga admitida sería $6,5 \text{ t}$.

Para mayor claridad se han tratado en la fig. 6 por separado y en escala doble en el ángulo superior izquierdo las columnas de menos de 30 cm . de espesor; para todas las columnas se han indicado las cargas admitidas en líneas continuas para 1% y en líneas cortadas para 2% de armadura longitudinal. Aún con la tensión así algo reducida, en relación con el reglamento actual, no ofrecen ventajas los zunchos salvo en columnas muy grandes y no hacía falta tomarlas en consideración en los diagramas de la fig. 6.

⁽³⁾ V. ABDANK, «*Beton u. Eisen*» 1931, XVI, p. 301.

POSIBLES VARIACIONES DE LA SUPERFICIE DEL GEOIDE Y SUS INFLUENCIAS SOBRE LA NIVELACION DE PRECISION

POR EL DR. GUILLERMO SCHULZ

Los instrumentos topográficos, geodésicos y astronómicos se colocan en «estación» mediante el «nivel a burbuja» con relación a la dirección de la gravedad en el punto en que, con ellos, se observa, ya sea con su eje de rotación en esta dirección (teodolito), ya sea con su eje visual normal a ella (instrumentos de nivelación).

La dirección de la gravedad en un punto terrestre, lo mismo como el módulo de su fuerza, es función de todas las masas interiores de la tierra y exteriores que sobre él actúan.

Siendo, por lo accidentado de la «superficie física» de nuestro planeta y lo despasejo de los conglomerados que la forman, la agrupación de las masas interiores visiblemente irregular, la variación de la gravedad de una estación terrestre a otra, tanto en dirección como en valor, no obedece a una función general para toda la tierra, no obstante la compensación parcial existente por la isostacia. En consecuencia, la «superficie mecánica», de nivel, o sea la equipotencial que, siempre normal a la dirección de la gravedad, pensamos trazada a la altura del nivel del mar: el «geoide», tampoco, es una superficie regular. Para poder efectuar los cálculos geodésicos de triangulación la reemplazamos por una superficie regular, un elipsoide de rotación (Bessel, Hayford), tangente al geoide en algún punto aparentemente conveniente, y para los cálculos de gravedad y nivelación por un esferoide. Las diferencias resultantes de las posiciones por el traspaso por cálculo geodésico sobre el elipsoide de referencia aceptado con las que da la observación astronómica directa sobre el geoide (reducida a él por curvatura de las verticales, si las estaciones se encuentran en alturas no despreciables), se llaman «desviaciones de la plomada» y, las diferencias entre gravedad

observada y precalculada a base del esferoide, «anomalías de la gravedad».

La observación astronómica se relaciona además que a la «vertical», a una segunda dirección fundamental, la del eje de rotación de la tierra y, finalmente, toda la labor geodésico-astronómica se funda, mediante las marcaciones materiales de los puntos astronómicos, gravimétricos, trigonométricos y nivelíticos, sobre la corteza terrestre o la superficie física de la tierra. Tenemos, pues, tres «referencias» fundamentales.

Hasta hace unos 100 años, se las consideraba invariables, a lo menos en comparación con la precisión de las observaciones, hasta tal punto que a base de trabajos geodésico-astronómicos se pretendía establecer un fundamento natural para la unidad de las medidas longitudinales: el metro. Pero, la creciente acumulación de observaciones y resultados enseñó, con el tiempo, que ninguna de las tres referencias es estable.

Si cualquiera de ellas varía se modifican forzosamente los resultados de observaciones repetidas. Por el enlace existente entre las referencias, no es posible sacar, de inmediato, una conclusión sobre cual de las tres se modificó y sobre la causa u origen de la variación constatada.

Gracias a la organización internacional de la vigilancia de los movimientos del polo o sea del eje de rotación de la tierra, (descubiertos por Küstner en Berlín, en 1885), en la que toma parte activa la República Argentina, se pueden corregir las observaciones de latitud y longitud por este movimiento, después de haber sido publicados los resultados del servicio internacional.

Las dos otras referencias, dirección y valor de la gravedad y la corteza terrestre, quedan íntimamente ligadas entre sí y cuando, en algunos casos, es posible separarlas, lo es sólo después de vastas investigaciones, interviniendo, quizás además de las citadas, observaciones con péndulos verticales y con mareógrafos. Este enlace no es sólo estrecho en su manifestación por los resultados de observación, sino también, en sus orígenes mismos. Si, p. ej. por alguna causa endógena, los Andes se alzan, se levantan, con ellos, no sólo las marcaciones de los puntos nivelíticos y las observaciones acusan el acrecimiento correspondiente de los desniveles sino, también, se produce otro reparto de las masas: la dirección y el valor de la gravedad en un vasto círculo se modifican y, también por ello, acusarán las nivelaciones una variación de las cotas resultantes por la transformación

de las superficies equipotenciales ⁽¹⁾. En general las dos causas obran en el mismo sentido, disminuyéndose así la elevación aparente de los puntos fijos. Se prevé que con el progreso del instrumental, ante todo el gravimétrico, y de los métodos de observación, cada vez será más fácil, separar las dos influencias.

No es de negar que de la geodesia moderna no sólo se exige la investigación del estado estático medio, sino a la vez la de los posibles movimientos dinámicos. Hace ya 25 años que un Congreso de Geología celebrado en Viena solicitó, para las investigaciones geológicas, la cooperación de la Asociación Geodésica Internacional. Además de tales variaciones seculares, cuya aclaración podrá tener un inmenso interés económico inmediato para la República, hay naturalmente también modificaciones periódicas de una duración más o menos reducida. Las más cortas serán las mareas y las oscilaciones en la atmósfera; las más largas las variaciones, anuales o en períodos de varios años, de los factores climatológicos, ante todo de la humedad y de las precipitaciones (lluvias y nieves, ventisqueros, hielo continental) y de las aguas subterráneas. Es posible que tengan influencia también los cambios de la temperatura y del porcentaje del contenido de sal de las aguas oceánicas, los de la vegetación en zonas extensas, etc. También juega un rol no despreciable la actividad transformatoria del hombre. Movimientos del magma no han sido demostrados aún.

Existe un cierto peligro de que, por casualidad, se halle la influencia de variaciones de uno de estos períodos más largos y que, equivocadamente, se la interprete como secular. Sería, p. ej., el caso cuando, en nivelaciones repetidas, de una posible variación del desnivel entre Córdoba y la Laguna de Mar Chiquita, aquí más adelante discutida, se quiera deducir algún movimiento geológico de las capas pampeanas. Existe, no obstante, con pleno derecho la profética manifestación del geodesta francés Lallemand que las nivelaciones geodésicas permitirán «en un futuro próximo, poder predecir con probabilidades de éxito, el crecimiento de una elevación, la profundización gradual de una cuenca, la desviación de un curso de agua, las modificaciones de las condiciones de un puerto, cuestiones

(1) K. ZOEPPRITZ en «*Über Schwankungen des Meeresspiegels infolge von geologischen Veränderungen*» ha calculado que una zona de sedimentación de un ancho de 5° y una altura de 500 m con material procedente de la región de 50° latitud norte elevaría, en la costa del Adriático, el nivel del mar por unos 15 m por el aumento de la gravedad.

todas de gran importancia para la ciencia y para el porvenir económico de un país».

Por esta razón será quizás útil discutir, numéricamente, las influencias de algunas de estas causas posibles de período largo, pero no secular, en nuestro caso especial y, conveniente que, a base de una documentación mejor y más vasta de la que dispongo, se sigan ventilando paulatinamente estas cuestiones.

Un breve repaso de las precisiones actuales de las observaciones pertinentes y de las variaciones ya constadas en las tres referencias conduce a lo siguiente:

La latitud geográfica la podemos observar actualmente con una precisión de $\pm 0'',1$ (igual a 3 metros; en el mejor de los casos con $\pm 0'',03$ igual a 1 metro), la longitud con $\pm 0,01$ *seg* (unos 2 a 3 metros en los confines del sud y norte de la República) y el acimut con $0'',30$. La precisión de las mediciones de la gravedad, tanto dinámicas como estáticas, es de ± 1 miligal (10^{-3} cm seg^{-2}) lo que equivale a la atracción de un disco de mineral de peso específico 2,4 y de 10 metros de espesor; una diferencia de la pesantez de ± 1 miligal se encuentra entre superficies equipotenciales distantes la una de la otra por algo más de 3 m, o sea una variación de 1 miligal produce una variación del «geoide» por unos 3 m. La balanza de Eötvös indica 1 unidad $\text{Eötvös} = 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$ o sea diferencias de gravedad de 0,1 miligal sobre la distancia de 1 km. La triangulación determina las situaciones horizontales relativas con una precisión de 1:100.000 y la nivelación, las verticales con

$$\pm 0,25 \sqrt{\text{distancia en km}} \text{ mm (precisión interior)}^{(1)}.$$

Esta precisión, expresada en medida angular, equivale a $\frac{0'',05}{\sqrt{\text{km}}}$ lo que son $0'',2$ para una nivelación de 6 km y $0'',01$ para el desnivel entre 2 puntos fijos distantes por 25 km. La nivelación trigonométrica no es suficientemente exacta para ser considerada, por la inestabilidad de la refracción. El péndulo vertical registra inclinaciones hasta el orden de $0'',002$ y un mareógrafo, el nivel medio del mar con aproximación mayor de 1 cm $^{(2)}$.

(1) Indico la «interior», puesto que las externas halladas, están todas afectadas ya por las influencias que aquí se analizan.

(2) Considerando sólo las imperfecciones del aparato y no las múltiples influencias extrañas que pueden modificar «el nivel medio del mar».

El movimiento de la luna causa variaciones de la gravedad hasta $0'',02$ y $0,1$ miligal, el del sol hasta la mitad de estos valores, sol y luna en conjunto hasta en máximo $\pm 0'',02$ y $\pm 0,1$ miligal. Bajo la influencia de estas fuerzas la tierra firme se deforma por algo menos que $0,1$ miligal y las desviaciones de la plomada por la misma causa llegan hasta $0'',02$ ⁽¹⁾. Las atracciones que ejercen las variaciones del océano atmosférico son aún menores. En consecuencia, en el estado actual de nuestras observaciones, estas variaciones de las «referencias» promovidas por causas exteriores pueden desprejarse, en los trabajos geodésicos comunes. El movimiento del polo terrestre se efectúa en espirales que (en 433 días) se alejan hasta algo más de $0'',3$ (en término medio $0'',15$) de la situación media del polo; el diámetro de las espirales varía de 7 a 20 m. El movimiento progresivo anual del polo es del orden de $0'',005$ hacia 40° longitud oeste de Greenwich. Las variaciones de las fuerzas centrífugas por la dislocación del eje de rotación en la tierra elipsoidal son insignificantes.

Los movimientos de la corteza terrestre han sido naturalmente muy importantes en el transcurso de las épocas geológicas ⁽²⁾, y, de seguro, continúan en los tiempos presentes y futuros. Además de las variaciones abruptas provocadas catastróficamente por terremotos y que han sido observadas como traslaciones horizontales hasta de 6 m (en el terremoto de California de 1906 por repetición de triangulación) y como verticales hasta más de 12 m (en el Japón, por observación directa) se producen movimientos paulatinos, apa-

(1)

Los términos semidiurnos de deformación en cm $\pm$
son aproximadamente para

la tierra firme				el geoide			
máximo		lat. 30° prom.		máximo		lat. 30° prom.	
luna	sol	luna	sol	luna	sol	luna	sol
16	7	11	5	34	16	26	12

(2) Véase *Anuario del Instituto Geográfico Militar*, tomo I, 1912, pág. 58: Dr. G. SCHULZ, *Las desviaciones de la plomada*.

rentemente regulares durante largos períodos. Lo más conocido en este sentido es el levantamiento del macizo escandinavo, el que, librado de la capa de hielo que antes le cubría, se levanta de 0,10 m en el sur hasta 1,1 m en el norte, por cada 100 años, sobre el nivel del mar báltico ⁽¹⁾.

La teoría de Wegener que supone nadando los continentes sobre el magma del interior de la tierra y dislocándose en consecuencia, abre la posibilidad de movimientos horizontales importantes.

Si se deduce el resultado de este breve estudio sobre la precisión de las observaciones con relación a la variación vertical de la corteza terrestre, resulta que el péndulo vertical, la balanza de Eötvös, los mareógrafos y la nivelación de precisión son los más exactos. Limitado el radio de aplicación del péndulo vertical, por ser sólo muy pocos los que un Estado puede instalar en su territorio, y el de los mareógrafos a la línea de la costa marítima y siendo aun demasiado trabajosa la labor con el gravímetro de Eötvös, resulta que —seguramente por mucho tiempo todavía— la nivelación de precisión mantendrá un rol decisivo en la investigación de los grandes, pero lentos movimientos de la costra.

La nivelación de precisión ha dado ya indicaciones muy precisas de variaciones del nivel de grandes extensiones. Cito aquí las —por muchas repeticiones comprobadas— en Rhenania y Vestfalia que establecieron movimientos anuales de + 1,2 hasta — 1,0 mm y totales de 7 mm en los últimos 15 años. La ciudad de Beuthen en la Alta Silesia es el centro de un gran hundimiento —de 200 mm desde 1879— que, desde un círculo de 20 km de radio de 0 mm de variación, asciende hacia el interior a otro de 3-4 km de radio con 4 mm de hundimiento anual. Sobre una línea de nivelación de precisión establecida cerca de Freienwalde/Berlín, expresamente para ensayos, por la Landesaufnahme prusiana se hallaron de 1911 a 1929/31 cambios hasta de 13 mm.

Al tratar de estas variaciones verticales ya se entra en el campo de las dudas cuanto de ellas es movimiento real de la corteza, y cuanto es aparente por variación de la otra referencia o sea de la dirección y valor de la gravedad (deformación del geoide) ya sea producida por la misma traslación de masas que se investiga, ya sea por otras causas más o menos conocidas, o ni sospechadas, cuyas consecuencias no deben ni menospreciarse ni despreciarse.

(1) Los movimientos verticales, también muy conocidos, del *Templo de Serapis* cerca de Pozzuoli, son aparentemente sólo locales.

Cada variación de masas alrededor de un punto nivelítico, p. ej., varía la superficie de nivel que por él pasa y modifica así su altura. Una *aglomeración* de masas o un aumento de su densidad tiene como resultas una *elevación* de la superficie de nivel en la región, y, cada disminución de masas o de su densidad, baja esta misma superficie. En el primer caso se disminuye la cota del punto fijo y en el segundo aumenta, sin que en realidad su altura física, su distancia del centro de la tierra, haya variado.

Una nivelación desde un punto fijo no influenciado hacia el influenciado demuestra una modificación de la cota y puede inducir a creer en movimientos geológicos sin que ellos en realidad, existan en la forma como de las variaciones de las cotas, se está tentado a deducir de inmediato.

Lo mismo pasa si desde un punto afectado se nivela hacia afuera de la zona de influencia. Ya que los puntos intermediarios están afectados en forma decreciente se consigue la impresión como si la región se hubiera inclinado sistemáticamente. Si la influencia que modificó la gravedad desaparece de repente de la región afectada, en el transcurso de la nivelación, resulta un «salto» en las cotas y si desaparece paulatinamente modificanse, en la misma relación, las inclinaciones aparentes de la costra. Por ello, variaciones del geoide de período corto en relación con el progreso lineal del trabajo nivelítico, aunque fuesen de magnitud apreciable, no tienen la misma importancia ya que se manifiestan como «errores casuales» y aumentan sólo el error medio exterior del trabajo. Las de período no despreciable, al contrario, asumen el carácter de «errores sistemáticos», falsifican los resultados, sin ser siempre demostrables por la disposición de las operaciones, p. ej. nivelación en ida y vuelta en cortos trechos, y ocasionan sospechas ya sea con respecto al trabajo de nivelación mismo, ya sea de movimientos geológicos. Aunque muy pequeños, los movimientos geológicos pueden tener como consecuencia grandes influencias económicas y por consiguiente sus enunciaciones, alarmas innecesarias. Para la República p. ej. no es indiferente que se constate para el sector de la costra terrestre en que está situado el noreste de la Provincia de Buenos Aires, y con él el puerto de la Capital, un levantamiento o hundimiento en unos milímetros por año.

El Dr. Ing. Alfred Schleusener en su trabajo «Über Deformationen der Niveauflächen durch bergmännischen Abbau und andere künstliche Massenbewegungen» («Sobre deformación de las superfi-

cies de nivel por explotación minera y otros movimientos artificiales de masas») ha demostrado el valor numérico de algunas de estas influencias de período largo y período corto y ha comprobado sus cálculos mediante la balanza de Eötvös (con una coincidencia de $\pm 1,3 \text{ ‰}$ para las variaciones de la altura del geoide y de $\pm 1,1 \text{ ‰}$ para las desviaciones de la plomada) en el caso de una esclusa de 14 metros de ancho y 160 metros de largo con un desnivel de aguas de alrededor de 2,6 m.

De sus cálculos resulta que la explotación de carbón de piedra en la región del Ruhr, en Alemania, ha causado un hundimiento máximo de las superficies de nivel o del geoide de 3 mm y en Alta Silesia, por la misma razón, de 1,5 mm. El tajamar de Assuan en el Egipto, del estado vacío al lleno, modifica el nivel del geoide al pie de su muro de contención en 1 cm. En el Zuidersee en Holanda, produjo —según los cálculos de Schleusener—, el cierre contra el mar y la evacuación parcial del agua, una variación de la superficie geoidal de 2,6 mm.

Si nos fijamos en el caso de la República Argentina parecen ser, además de las mareas oceánicas, las mareas del Río de la Plata, una de las variaciones de masas más grandes que pueden ocurrir y afectar las nivelaciones de precisión, ante todo por su influencia sobre el «Cero del Riachuelo». Si las consideramos parejas en todo el estuario y de una altura de 0,75 m entre aguas bajas y altas, resulta una variación aparente de la altura del geoide del orden de 1,5 mm, la que a 20 km hacia el oeste, en Morón p. ej. ya ha disminuído al orden de 0,5 mm. Pero, como ya fué dicho, tales variaciones rápidas no tendrán otro efecto que aumentar el error medio exterior de la nivelación, sin aportar influencias sistemáticas, sino en casos excepcionales que difícilmente producirán consecuencias. Otra cosa podrá suceder, si las aguas suben más y para una duración de varios días, y si, justamente en tal temporada, se arranca de un punto fijo en el puerto con una nivelación hacia el oeste. La influencia es directamente proporcional a la variación de las alturas de las aguas y es, pues, del orden del doble de los valores, arriba indicados, si el desnivel de las aguas en todo el estuario llega a 1,5 m.

Con toda seguridad sufren variaciones «seculares» no reales los puntos fijos cercanos al Río de la Plata por la sedimentación continua que en él tiene lugar. Por cada 0,1 m de acumulación, supuesta pareja en todo su lecho, disminuyen cotas de puntos fijos en

el puerto aparentemente su valor en el orden de 0,4 mm. Nuestros grandes ríos, Paraná y Uruguay, varían periódicamente, y cada vez por algunos días o semanas, el caudal de sus aguas, lo que puede tener consecuencias sistemáticas ya que estas variaciones alcanzan hasta más de 7 metros. La figura 1 indica el orden de las variaciones aparentes de las cotas que producen, a distintas distancias de sus bordes, cursos de agua rectos de diversas anchuras por cada metro de desnivel y el desarrollo del error medio interno de una nivelación de precisión. Si, bajo la presunción que no deben desprejarse variaciones aparentes del geoide de un valor mayor que la mitad del error medio de la nivelación, se supone una variación del nivel de las aguas de 5 m, resulta de la figura 1 que para un río de:

500 m	de ancho, no debe desprejarse la variación del geoide hasta una distancia del borde de	1 km.
1 000 »		2 »
2 000 »		10 »
3 000 »		30 »
4 000 »		40 »
5 000 »		50 »

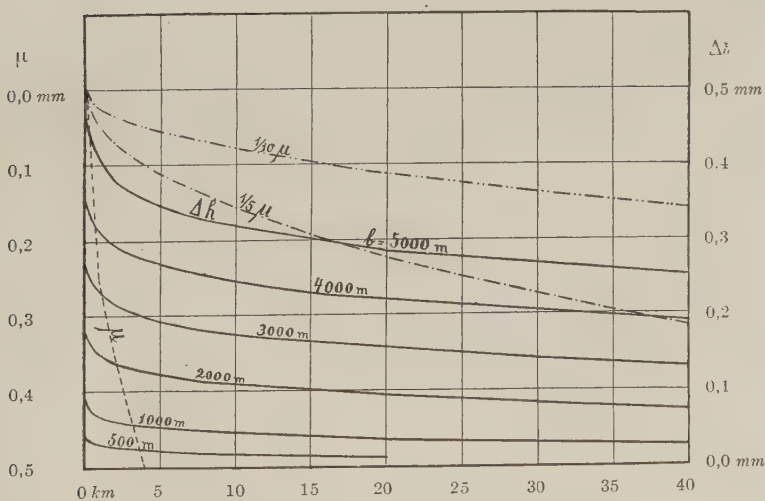


Fig. 1

En vez de aumentar las curvas de la variación del geoide en 5 veces y disminuir la del error medio a la mitad se ha reducido, en la figura 1, el error medio a un décimo.

El río Iguazú varía su nivel en más de 35 m. Si suponemos su lecho de un ancho de 300 m resulta que la variación del geoide habría que tomarla en cuenta hasta unos 40 km de su borde; pues, importa sobre este trecho un cambio de los desniveles del orden de 0,7 mm siendo el error medio de nivelación sobre el mismo trecho de 1,6 mm.

Sería muy interesante efectuar cálculos más exactos, a base de fundamentos cartográficos y fluviométricos verdaderos, que los que con los presentes datos se pretende ofrecer, un cálculo, p. ej. para algún punto cercano al delta Paraná-Uruguay, o dentro de él, (Ibicuy, Campana, Baradero p. ej.) y otros más distantes, tomando quizás las situaciones de puntos fijos altimétricos existentes. Otra región de importancia en este sentido parece ser el norte de la Provincia de Corrientes donde fluctuaciones en el nivel de la Laguna Iberá y de todas las otras del delta de irrupción que, en forma de abanico, se extiende hasta el sur del Paraguay, coincidente, quizás, con una crecida del Alto Paraná y Pilcomayo-Paraná, implican grandes traslados de masas.

Una variación de 1 m de las aguas, también de las subterráneas, supuesta pareja en toda esta región llega a modificar una cota en Corrientes hasta el orden de 3 mm y otra, en un punto central (cerca de Mburucuya), hasta el orden de 5 mm.

Es de sospechar que referente a los períodos largos de variación jugarán un rol importante, justamente, las aguas subterráneas.

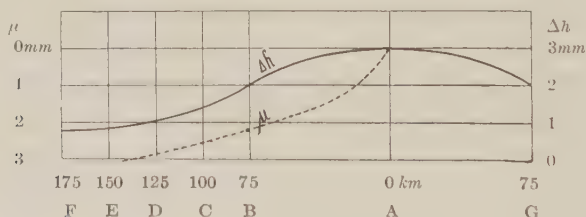


Fig. 2

Si se supone que las aguas subterráneas de los alrededores de la Laguna Mar Chiquita en Córdoba en un radio de 75 km alrededor de su centro (A, fig. 2) difieren entre una época climatológica muy húmeda y otra muy seca en masa igual a una altura de 1 m, se tendría las variaciones aparentes de cotas en los puntos F hasta G indicadas en la figura 2, las que, comparadas con los errores medios

de una nivelación de A a F, asignados en la misma figura, resultan casi del mismo orden; de manera que no deberían despreciarse sino aplicarse como correcciones si, efectivamente, fuera posible determinar el nivel de las aguas subterráneas. La variación de las aguas subterráneas en un suelo como el pampeano producirá, naturalmente, también variaciones de las alturas físicas de los puntos fijos. El loess, llenándose con agua, se hinchará y levantará las marcaciones. Este movimiento obra en contra del producido por la atracción de las aguas de manera que no se podrá predecir qué diferencias darán 2 nivelaciones efectuada la una en un período de gran humedad y la otra en uno de gran sequía. Nótese aquí la importancia que puede tener la elección de los sitios de colocación de las marcaciones y la manera de su construcción y fundación. Habrá que buscar de cimentarlas, si es posible, en un suelo que, físicamente, no se afecte por el aumento o disminución de las aguas.

Una nevada supuesta en toda la Cordillera de un metro de altura (densidad de la nieve 0,1) levantaría el geoide en Mendoza por un valor del orden de 1 mm.

Los números indicados en el presente trabajo no tienen ninguna pretensión de precisión, sino tratan solamente de contribuir a la aclaración paulatina de influencias que pueden tener valor para los trabajos nivelíticos —y también para las obras públicas— fundamentales del país.

BIBLIOGRAFIA

POR E. R.

GRIVEAUD, LEON, *Traité pratique de construction et aménagement des usines*. Un vol. de 418 págs. con 468 figuras, en 8º jésus. Precio, 95 francos, encuadernado. Editado por la « Librairie Polytechnique », Ch. Béranger. París, 1936.

El autor es un arquitecto e ingeniero que durante más de treinta años ha construído los más diversos géneros de edificios e instalaciones para industrias. Su abundante experiencia le permite tratar las cuestiones objeto de su obra con un dominio absoluto de todos sus aspectos, hasta en aquellos que no dependen de la técnica, pero que dominan en todos los problemas de la industria, determinando la forma de las únicas soluciones prácticas; la adaptación necesaria a las condiciones económicas.

Como lo hace notar el autor en el prefacio de su obra, los tiempos siguientes a la Gran Guerra crearon un desorden de ideas y de cosas que no ha podido menos de influir en la manera de considerar la instalación y funcionamiento de las industrias. Y, además, agrega, « la acción de políticos de vistas cortas, han engendrado una inquietud general que contribuye a agravar y prolongar un estado de crisis, atribuído al maquinismo, pero que más bien parece originarse en una reducción del consumo y en errores económicos que llevan a aumentar el capital de las sociedades y compañías industriales, para satisfacer necesidades temporarias ».

Y examinando el aspecto ofrecido por la actividad industrial francesa, encuentra que hay mucho que hacer. « Estamos lejos, dice, de tener proporcionalmente a nuestra población, tantos automóviles como los norteamericanos, tantos teléfonos como los suecos, tantos aparatos de telegrafía sin hilos como los ingleses; y hoy mismo, en nuestras granjas, no hay más comodidades de vivienda que las existentes en tiempo de Luis XIV... ».

Para reaccionar contra todo esto, parece evidente que la máquina y la organización del trabajo humano deben perfeccionarse sin cesar; el estudio detallado de cuanto atañe a la pequeña y a la gran industria, debe ser intensificado todo lo posible; y en este sentido, el volumen que Mr. Griveaud ha consagrado a la construcción y funcionamiento de las usinas, constituye un aporte valioso.

En este primer volumen se incluyen cuatro capítulos que tratan, respectivamente, del proyecto y ejecución de los trabajos: las disposiciones generales de almacenes, talleres y usinas; las instalaciones accesorias; riesgos, seguros y protección contra incendios, fundaciones, edificios administrativos, habitaciones para obreros, etc.; los medios de manutención, funcionamiento y conservación, etc.

Cada capítulo está ampliamente desarrollado, con un texto claro, conciso, bien comprensible hasta por los no especializados en tecnología industrial y completado con numerosos cuadros numéricos, tablas, croquis y figuras explicativas.

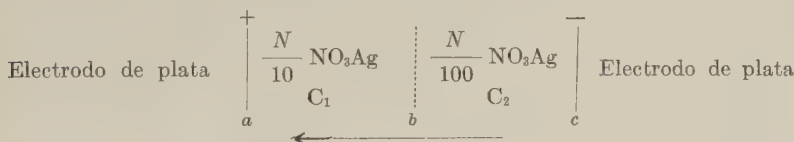
ELIMINACIÓN DE LA DIFERENCIA DE POTENCIAL DE SOLUCIÓN A SOLUCIÓN EN LAS PILAS DE CONCENTRACIÓN SIN EMPLEAR ELECTROLITOS COMO MEDIO DE UNIÓN

POR EL QUÍMICO DR. LUIS A. SOLÓRZANO

El conocimiento de la velocidad de los iones, del número de transporte, del grado de disociación de una sustancia química, de la presión osmótica, de la conductibilidad, de la medida de la fuerza electromotriz, etc., es del dominio de la físico-química como de la biología.

Es necesario primero, dar una definición de « pila de concentración ». Se llama « pila de concentración » a los sistemas galvánicos (electrodos metálicos más electrolitos) susceptible de engendrar energía eléctrica, sin que sea acompañada de ninguna transformación química.

En toda pila de concentración la fuerza electromotriz depende de tres diferencias de potencial: así en la cadena



las tres diferencias de potencial son a , b y c ; a : electrodo de plata y solución $N/10$ de NO_3Ag ; b : diferencia de potencial entre las soluciones $N/10$ y $N/100$; c : diferencia de potencial entre electrodo de plata y solución $N/100$. Esta fuerza electromotriz total se mide en el potenciómetro, con el dispositivo indicado en la figura 2, que en el ejemplo citado responde a la fórmula:

$$E = \frac{2v}{u+v} \frac{RT}{n} \log \frac{C_1}{C_2}$$

Siendo E la fuerza electromotriz total, v la velocidad del anión, u la velocidad del catión, R la constante universal de los gases equiva-

lente 1,986 calorías gramos o a 8,31 joules, T la temperatura absoluta; log. logaritmo decimal; C_1 la solución más concentrada; C_2 la otra solución.

La diferencia de potencial (b) líquido | líquido que se llama también potencial de difusión, depende de la velocidad de los iones y de las concentraciones de las soluciones a considerar.

Esa diferencia de potencial líquido | líquido responde a la siguiente fórmula:

$$E = \frac{v - u}{u + v} \frac{RT}{n} \log \frac{C_1}{C_2}$$

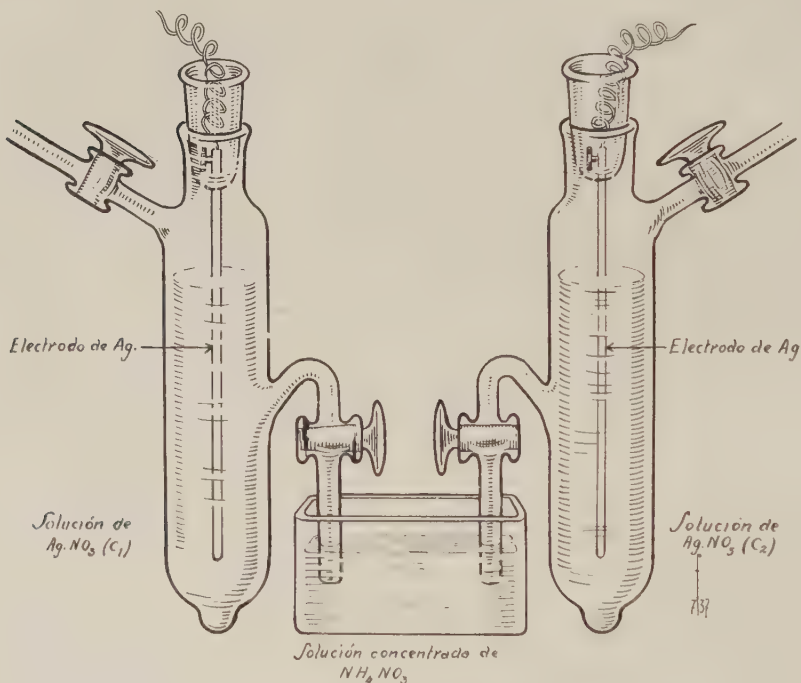


FIG. 1. — Pila de concentración separa por una solución conductora de nitrato de amonio en solución concentrada.

La velocidad de los iones varía con la concentración de las soluciones. Muchos experimentadores han buscado por esta causa un método de eliminar esa diferencia de potencial, líquido | líquido, para considerar a y b , cuya fuerza electromotriz responde a la siguiente fórmula

$$E = \frac{RT}{n} \log \frac{C_1}{C_2}$$

donde un faradio se considera como unidad de electricidad. Con esta fórmula conociendo la concentración de una solución, podemos, mediante la medida de E determinar la concentración X de la solución desconocida, pero de la misma sal.

Además eliminando el potencial de difusión, el cálculo se simplifica.

Bjerrum, fué quien propuso (ver la revista inglesa *Faraday. Soc.* Londres, Dic. 1906) una solución concentrada de KCl, para eliminar

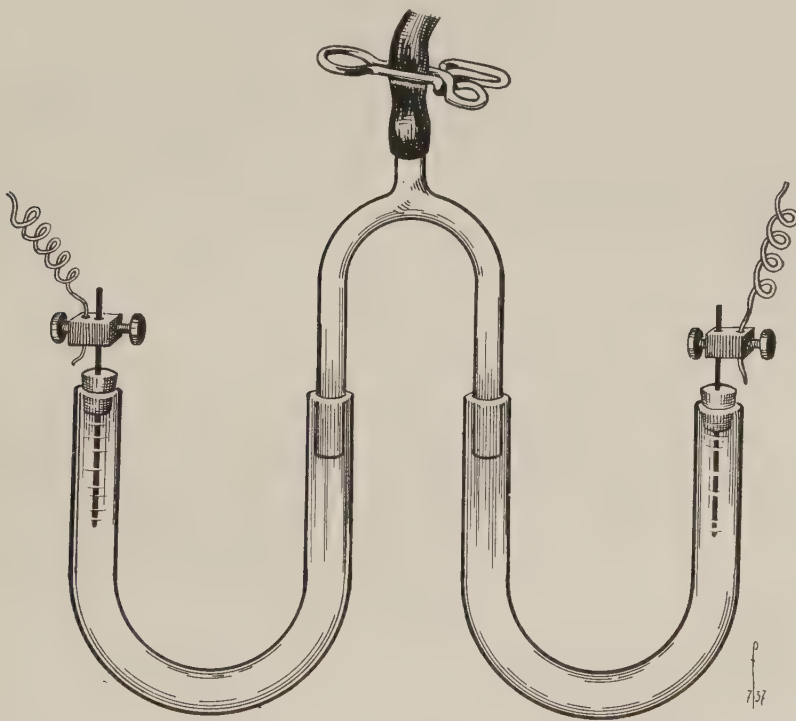


FIG. 2. — Pila de concentración unidas las soluciones C_2 y C_3 directamente por intermedio del sifón a .

la diferencia de potencial de los líquidos, o como lo indica el manual de técnicas de Físico Química por el Dr. A. Michaelis, con una pasta de agar-agar al 3 % en solución concentrada de KCl, puesta en tubos conductores.

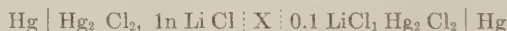
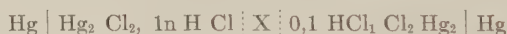
Este procedimiento da excelentes resultados (las velocidades de los iones K y Cl son iguales) cuando se mide una solución ácida o alcalina, por ejemplo para determinar el pH de una solución. Pero tiene estos inconvenientes:

1º) El empleo de una solución concentrada, que requiere un recipiente apropiado, donde debe conservarse los conductores de agar-agar. Esta solución concentrada, asciende por las paredes del recipiente, por lo que se requiere tener un cuidado especial.

2º) No es útil para determinar la F. E. de una pila de concentración de NO_3Ag , ni para determinar KCl , o NaCl en electrodos de calomel.

3º) Que como dice Michaelis, libro citado, muchas veces es necesario esperar media a una hora para que el menisco del electrómetro capilar se quede inmóvil en la medida de la F. E. por el método de compensación o de Pogendorf.

El Dr. A. C. Cumming, ha tratado de buscar un medio para salvar el penúltimo inconveniente. El resumen de su trabajo, está publicado en la revista *Ztf. f. Elektrochemie*, 13, pág. 17, 1907, donde se ve que ha experimentado con electrolitos X para reemplazar el KCl . Ha utilizado el dispositivo de la figura 1, y como electrolito X ha experimentado con soluciones de distintas concentración de

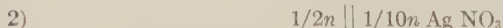


Encontró que la solución $10n$ de NH_4NO_3 elimina el potencial de difusión, y que como él mismo lo dice, este electrolito no sirve para determinar la F. E. de una cadena formada por electrolitos básicos.

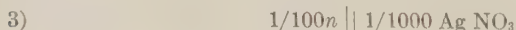
En otro trabajo del mismo autor, cuyo resumen está publicado en la misma revista *Ztf. f. Elektrochemie*, 13, pág. 18, 1907, ha empleado soluciones saturadas de NH_4NO_3 y de KNO_3 para eliminar el potencial en las siguientes cadenas:



y



y



En este caso las velocidades de los iones $\text{Ag} + \text{NO}_3$ son casi iguales, de manera que la diferencia de potencial de difusión en esas cadenas es despreciable. En la última, según Cumming, a 25° , $\epsilon d = 3,8$ milivolt.

Los resultados consignados son el promedio de seis a diez y siete medidas, que no salva, por lo tanto, el inconveniente tercero consignado, de la solución saturada de KCl.

Cumming dice, que con ese procedimiento, las medidas no son exactas con soluciones más diluídas. El potencial de difusión, aun en el caso de NO_3Ag , no es despreciable cuando se trata de una cadena, donde la diferencia de concentraciones de las soluciones es grande, como



puesto que esa diferencia de potencial es proporcional a $\log C_1/C_2$.

Experimentadores norteamericanos, A. B. Lamch y Larson (*Journ. Amer. Chem.* (42), 1920, pág. 229), en un trabajo extenso dicen:

Los potenciales de los líquidos unidos en las células voltaicas, son la causa de la perplejidad en las medidas de la f. e. de las pilas; y de los simples potenciales de los electrodos, no solamente porque evitan observaciones directas y un cálculo riguroso, sino también porque ese potencial de difusión es la causa de la incertidumbre en la experimentación. Ha sido particularmente difícil asegurar la reproducibilidad de la f. e. de cadena en la cual las soluciones contenían iones de velocidades de marcada diferencia; en estos casos los errores alcanzan a varios milivolts. Después agregan, que recientemente se han ocupado sobre el estudio del efecto de Thomson en los electrolitos, el cual comprende la medida exacta de la f. e. de las pilas, o de otras uniones líquidas. Esto los ha conducido a un estudio de la reproducibilidad de tales potenciales de unión y últimamente al desarrollo de un tipo de unión, el cual bajo desfavorables condiciones, es decir, con iones de marcadas diferencias de movilidad, da la f. e. reproducible a 0.01 milivolts. Usan dos procedimientos (que se requiere cuidado y dispositivos especiales) uno agitando las soluciones — uniones por « agitación »— y otro renovando esas soluciones — uniones « corriente ».

Un libro reciente, edición 1929, titulado *Elektrometrische Messungen mit Wasserstoffelektroden in Mischungen Von Säuren und Basen mit Salzen. Die dissoziationskonstante von Wasser, phosphorsäure, citronensäure und Glycin*. Kopenhagen, 1929. Consta de 208 páginas. Miels Bjerrum und Augusta Unmack.

Cuyos principales capítulos de mi interés, ha tenido la gentileza de traducir la doctora Margarita de Bose, profesora del Instituto de Física de la Universidad de La Plata.

Este libro se ocupa de estas clases de determinaciones, así en la pág. 37, en el capítulo: *El arreglo de las conexiones conductora entre las soluciones*, dice:

Cuando se quiere medir cadenas de diferentes soluciones que se tocan, el potencial entre los líquidos ocasionan dificultades en su medida. Es difícil encontrar valores que sean reproducidos, porque los valores encontrados dependen de la manera de formarse el plano límite de las soluciones y de su edad, etc., etc.; emplea una solución de 3,5 mols. de KCl, como solución puente, cuidando que la solución de KCl a medir, estuviera a un nivel más alto que la solución puente (KCl concentrada), etc. A fin de este capítulo dicen: en los últimos años han usado, especialmente experimentadores americanos la « conexión corriente » propuesta por Lamb y Larson, en vez del método simple de introducir los tubos. Hemos obtenido casi los mismos resultados por ambos métodos, en algunas mediciones con nuestras soluciones y por eso hemos preferido usar el método de introducción más antiguo y más seguro.

Como se ve, el autor del citado libro prefiere la solución concentrada de KCl, cuyos inconvenientes y conveniencias hemos apuntado precedentemente.

También en las determinaciones de pH con los nuevos aparatos: acidímetro del Dr. Trenel, y el potenciómetro de Leeds y Northrups. Co., usa el 1º una solución concentrada de KCl en sifones de vidrio, cuyos extremos tienen papel de filtro bien prensados. El 2º solución de KCl y agar-agar, tal como indica Michaelis.

El Dr. Werner Hiltner, de la universidad de Breslau, en su libro «Práctica del análisis potenciométrico», pág. 44 - (1936), indica como medio de unión, «un puente electrolítico neutro con la disolución que se investiga», al hablar de los electrodos de calomelanos.

El KCl en solución concentrada servirá para soluciones ácidas y alcalinas. El NO_3NH_4 en solución concentrada suprime probablemente la diferencia de potencial entre dos soluciones de AgNO_3 , cuya diferencia de concentración no sea muy grande, pero esto no prueba, como lo dice William C. Mc. C. Lewis en su *Traité de Chimie physique*, tomo II, pág. 135, 1921, que esta propiedad sea de aplicación general.

Según Lewis también, hay otro método, debido a Nernst, que consiste en poner en el mismo electrolito (NO_3K o KCl) en toda la pila, siendo la concentración de estos electrolitos mucho mayor que la de los otros electrolitos presentes. De esta manera la corriente interior

es sobre todo transportada por los electrolitos añadidos, y se tiene en cuenta nada más que los potenciales de los electrodos. Este procedimiento que es de una aplicación teórica general, tiene el inconveniente de no poder ser utilizado en todos los casos; el KCl precipita el AgNO_3 . Por otra parte, si se hace uso de una solución concentrada, en esas condiciones de KNO_3 , para medir cadenas de concentración de AgNO_3 , la disociación de esta sustancia será modificada por la presencia del ion NO_3 , del nitrato de potasio y es difícil determinar esta modificación.

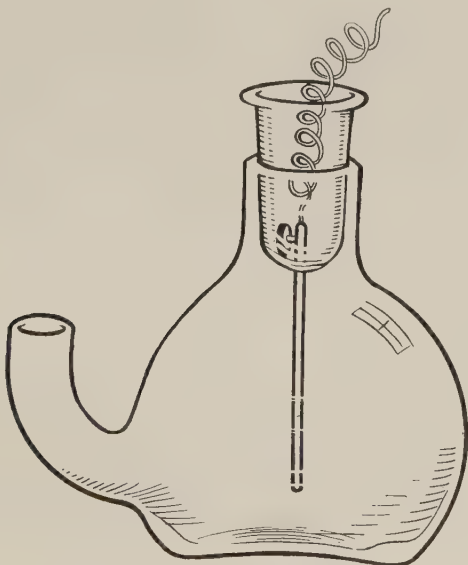


FIG. 3. — Recipiente de vidrio « Pyrex » con su electrodo de plata soldada a la tapia.

Los inconvenientes de uno y otro sistema propuestos en la eliminación del potencial de difusión me han inducido a buscar un dispositivo general, que de inmediato se encuentre el potencial y quede constante, sin utilizar electrolito como medio de unión, con la idea de utilizar las cadenas de concentración en el análisis cuantitativo.

Con este objetivo, he realizado primeramente casi todas las experiencias indicadas por Michaelis y he trabajado no sólo con electrodos de hidrógeno, sino también con electrodos de plata, cobre, de calomel y de quinhidrona, empleando soluciones tituladas de sustancias puras.

Los electrodos de plata eran alambre de plata de 1,2 mm. de espesor, que revestí con una capa de plata electrolítica, hasta que estos alambres adquirieron un espesor de 2,2 mm. Para hacer la electrólisis,

he empleado la fórmula de Kohlrausch, pág. 40: 0,3 a 0,6 ampère por cm^2 ; la solución: 46 gramos de cianuro doble de plata y potasio, más 12 grs. de cianuro de potasio y agua destilada hasta completar un litro.

Los electrodos los alisé, primero con una lima fina, después con papel esmeril regular y por último con papel esmeril fino. Ha sido necesario utilizar papel de filtro embebido en alcohol para limpiar los electrodos.

Los recipientes empleados en cadena de concentración con NO_3Ag — SO_4Cu y ácidos con quinhidrona, eran como indica la figura 3, los que mandé construir de vidrio común incoloro y color marrón y de vidrio « Pyrex ».

A los de vidrio común es necesario darle un « bautismo » de NO_3Ag , cuando se quiere trabajar con estas soluciones, para esto se

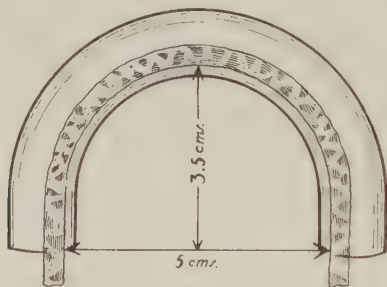


FIG. 4. — a arco de vidrio; b tirilla de papel de filtro.

los llena con solución de NO_3Ag $n/10$ más o menos, y se los deja 24 a 48 horas antes de usarlo. Después se los enjuaga con agua destilada, y con las respectivas soluciones que formarán la cadena. Las botellitas fabricadas con vidrio « Pyrex » no han necesitado de este « bautismo ».

Como medio de unión he empleado tirilla de papel de filtro colocada en un arco de vidrio de un diámetro tal que sus extremos cubrían la parte superior del tubo lateral de las botellitas. Las tirillas de papel de filtro tenían 0,5 cm. de ancho y de una longitud un poco mayor que la longitud del arco. La figura 4 representa el arco y el papel colocado.

Una vez colocada la tirilla de papel en el arco, sumergí sus extremos en agua destilada, hasta que todo el papel, por absorción, quedó humedecido. Esto facilita la unión de las soluciones indicadas en la figura 5.

Antes de colocar el arco de unión se secan las extremidades del papel con papel de filtro seco.

En la cadena $N/10 : N/100$ de NO_3Ag los siguientes resultados poco halagadores:

ϵ (observado) = 0.0567 volts; ϵ (calculado 0.0564 volts; t_a 27°8. Después de 5' ϵ (observado) = 0.0570 volts.

De primera intención no obtuve un valor exacto, no queda mucho tiempo constante y al poco tiempo tiende a disminuir.

Esto es debido a que las soluciones de AgNO_3 ascienden por el papel velozmente, y a fin de que el contacto de las dos soluciones se haga con mayor retardo, he mojado la tirilla de papel de filtro, no en agua destilada, sino en alcohol (el AgNO_3 es insoluble en alcohol).

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
14 h. 12'	0.0557 volts	0.0559 volts	26° 5
14 h. 30'	0.0557 »	0.0559 »	26° 5
14 h. 43'	0.0557 »	0.0559 »	26° 5
14 h. 52'	0.0557 »	0.0559 »	26° 5

Otra cadena

$N/10 : N/20$

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
13 h. 20'	0.0173 volts	0.0164 volts	24° 8
13 h. 28'	0.0166 »	0.0164 »	24° 8
13 h. 33'	0.0166 »	0.0164 »	24° 8
13 h. 43'	0.0164 »	0.0164 »	25° 2
13 h. 47'	0.0164 »	0.0164 »	25° 2
13 h. 56'	0.0160 »	0.0164 »	25° 2
14 h. 2'	0.0157 »	0.0157 »	25° 2

El termino medio de las seis últimas determinaciones da 0.0164 volts.

Lavé con alcohol los electrodos de plata y esperé 10 minutos antes de anotar la primera medida:

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
14 h. 14'	0.0167 volts	0.0164 volts	25° 5
15 h. 20'	0.0150 »	0.0164 »	25° 5

El término medio de las nueve determinaciones da 0.0163 volts.

Para humedecer la tirilla de papel de filtro (que tiene más o menos 5 a 6 mm. de ancho por 11 cm. de largo) la coloco primero en el arco de vidrio y mojo sus extremos salientes en el alcohol colocado en un recipiente apropiado. Cinco minutos tarda en humedecerse totalmente la tirilla de papel por absorción.

El papel debe ser simétrico; para esto, una vez cortada la tirilla de papel se dobla en dos y con una tijera se iguala. No es condición

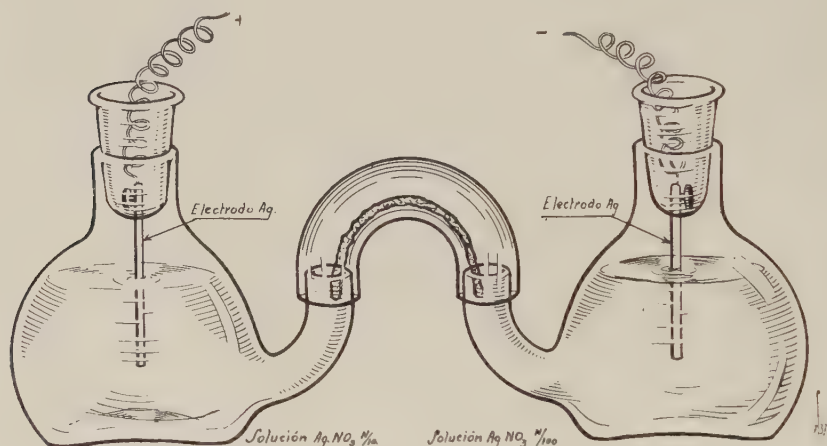


FIG. 5.

necesaria que sus lados sean líneas paralelas, es suficiente que ambas mitadas sean simétricas.

Hice varias veces estas determinaciones con soluciones de concentración iguales a las anteriores.

Otra. — Colocada la tirilla en el arco, para no demorar, se puede sumergir en un recipiente que contiene alcohol, humedeciendo así el papel de inmediato.

Lavo los electrodos de plata con papel de filtro embebido en alcohol.

N/10 : N/20

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
16 h. 37'	0.0158 volts	0.0164 volts	25° 9
16 h. 43'	0.1058 »	0.0164 »	25° 9

Lavé nuevamente los electrodos con alcohol, los coloqué en sus respectivas soluciones y esperé dos minutos.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
16 h. 48'	0.0161 volts	0.01647 volts	26°
16 h. 51'	0.0161 »	0.01647 »	26°
16 h. 55'	0.0161 »	0.01647 »	26°
17 h.	0.0160 »	0.01647 »	26°

N/10 : N/1000

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
12 h. 2'	0.1120 volts	0.1130 volts	t° 23° 6

Lavo los electrodos con papel embebido en alcohol.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)
12 h. 9'	0.1120 volts	0.1130 volts
12 h. 11'	0.1129 »	0.1130 »

Lavo nuevamente los electrodos con alcohol 13 h 16'.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
13 h. 19'	0.1110 volts	0.1130 volts	23° 3
13 h. 21'	0.1114 »	0.1130 »	23° 3
13 h. 30'	0.1110 »	0.1130 »	23° 3

Embebí con alcohol el papel de filtro, que sirve de puente a las 13 h 34'.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
13 h. 41'	0.1125 volts	0.1130 volts	23° 3
13 h. 45'	0.1125 »	0.1130 »	23° 3
13 h. 49'	0.1125 »	0.1130 »	23° 3
13 h. 55'	0.1125 »	0.1130 »	23° 3

Al día siguiente noté que la tirilla de papel estaba manchada de obscuro, en casi la mitad del lado positivo, o sea del lado de la solu-

ción concentrada y que en la otra mitad la tirilla de papel no cambió de coloración.

La línea límite entre lo obscuro y lo claro, en la tirilla de papel es una recta; obtuve, así, objetivamente el plano límite de que hablan ciertos autores.

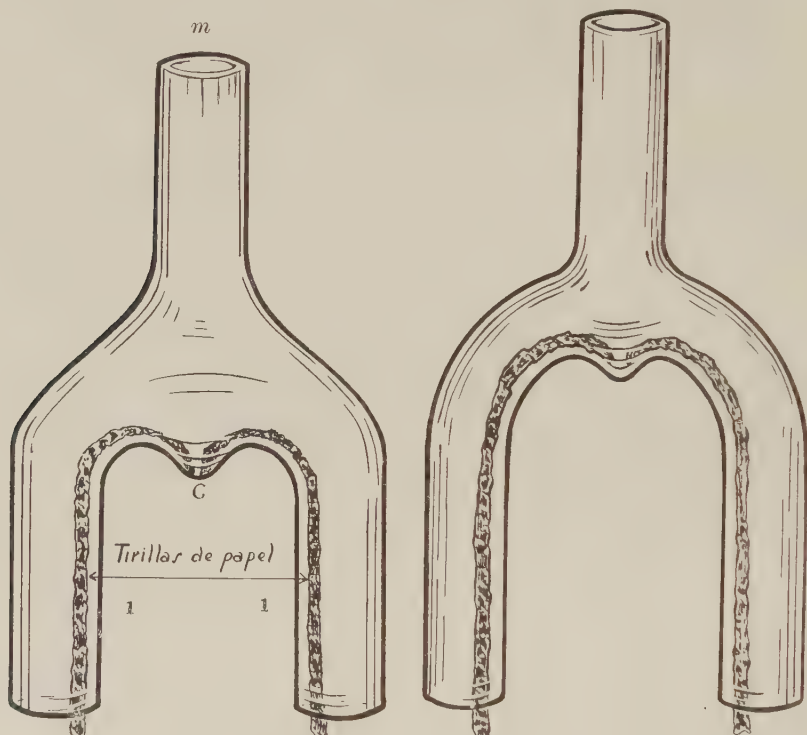


FIG. 6. — Puentes.

Tomé las determinaciones de la cadena que el día anterior dejé unida con papel.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
10 h. 3'	0.1110 volts	0.1130 volts	23° 8

Lavé con alcohol los electrodos.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
10 h. 8'	0.1112 volts	0.1130 volts	23° 9
10 h. 15'	0.1126 »	0.1130 »	23° 9
10 h. 26'	0.1125 »	0.1130 »	23° 9

N/10 : N/10,000

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
19 h. 7'	0.1700 volts	0.1717 volts	23° 9

Lavé los electrodos con alcohol.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
19 h. 10'	0.1697 volts	0.1717 volts	23° 9
19 h. 15'	0.1687 »	0.1717 »	23° 9

19 h 17'. Embebí en alcohol la tirilla de papel de filtro y nuevamente lavé los electrodos.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
19 h. 33'	0.1707 volts	0.1717 volts	23° 3
19 h. 50'	0.1707 »	0.1717 »	23° 3

N/10 : N/20,000

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
10 h. 20'	0.1845 volts	0.1885 volts	23° 1
10 h. 25'	0.1855 »	0.1885 »	23° 2
10 h. 38'	0.1870 »	0.1885 »	23° 8
11 h. 33'	0.1870 »	0.1885 »	23° 8
17 h. 34'	0.1870 »	0.1885 »	22° 8

N/10 : N/100,000

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
18 h.	0.2271 volts	0.2295 volts	22° 8
18 h. 25'	0.2271 »	0.2295 »	22° 8
18 h. 43'	0.2276 »	0.2295 »	22° 8
18 h. 58'	0.2276 »	0.2295 »	22° 8

A las 19 horas limpié con alcohol los electrodos.

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
19 h. 4'	0.2276 volts	0.2297 volts	22° 8

El mismo día determiné el valor de esta otra cadena de concentración con soluciones completamente disociadas.

N/10,000 : N/100,000

Hora de observación	ϵ (obs.)	ϵ (cal.)	t
18 h. 40'	0.0589 volts	0.0587 volts	22° 8
19 h.	0.0589 »	0.0587 »	22° 7
19 h. 5'	0.0589 »	0.0587 »	22° 7

Los arcos empleados hasta ahora tenían 3,5 centímetros de alto y 5 centímetros de largo (fig. 4).

He experimentado con arcos más altos (5 cm. de alto y 3,5 cm. de ancho).

La tirilla de papel en el primer arco, forma una línea curva en toda su extensión, mientras que en el otro arco, (que es como una u invertida), la tirilla de papel forma líneas verticales en sus ramas.

Experimenté con la siguiente cadena :

N/1000 : N/10,000

A. Con el arco alto. N/1000 . N/10,000		B. Con el arco alto. N/1000 . N/10,000	
Hora de observación	ϵ (obs.)	Hora de observación	ϵ (obs.)
11 h. 45'	0.0585	11 h. 26'	0.0577
11 h. 50'	0.0585	11 h. 30'	0.0560
11 h. 55'	0.0585	11 h. 35'	0.0560
12 h. 12'	0.0585		
En esta cadena colocho el arco de unión B y con el mismo papel de filtro, teniendo cuidado de colocar el extremo del papel a la solución más concentrada en su igual, etc.		A la tirilla de papel embebí nuevamente en alcohol.	
12 h. 17'	0.0560	12 h. 8'	0.0560
		Aquí coloqué el arco bajo, con las mismas precauciones y mojándolo con alcohol el papel de filtro.	
		12 h. 25'	0.0585
		17 h.	0.0580

Esto hace pensar que el arco de vidrio donde va la tirilla de papel debe ser bajo y abietro.

Me ha parecido que el empleo de alcohol para humedecer las tirillas de papel, constituiría un inconveniente por diversos motivos; por esta causa no he experimentado de la misma manera con otros electrodos.

Probé dispositivos en los cuales no sea utilizado el alcohol en la tirilla de papel de filtro, hasta adoptar los modelos siguientes dibujados de tamaño natural (fig. 6).

En cada rama de los puentes coloqué tirillas de papel de filtro de manera que ambas estuviesen contiguas en la ampolla *C* a un milímetro de distancia.

Para eso, colocadas las tirillas, las mojo con sus respectivas soluciones, introduciendo sus ramas en las soluciones hasta la altura 1. El resto del papel, por absorción, queda humedecido de inmediato. Con una varillita de vidrio terminada en punta roma, introducida por (*m*) (fig. 6), doblo las extremidades superiores del papel (tirilla de papel de filtro), hasta que queden bien adosadas a la pared de la ampolla *c*. Todo esto se hace en un minuto.

En la forma que indica la figura 7, queda unida la cadena. La ampollita *c*, por la absorción de los papeles, queda humedecida aunque no puede llenarse debido a la diferencia de nivel. Con este dispositivo se obtiene un dato constante, eliminando el potencial de difusión. En muy contados casos, ha sido necesario esperar un cierto tiempo para obtener el dato buscado.

La cadena con NO_3Ag , cuya diferencia en las concentraciones de las respectivas soluciones, era grande, obtuve una constancia de más de 24 horas.

Ejemplos: Cadenas de concentración con soluciones normales de AgNO_3 .

- | | | |
|----|-----------------|---|
| 1) | $N/10 : N/100$ | ϵ (cal) a $15^\circ = 0.0538$ volts |
| | | ϵ (obs) = 0.0540 volts y queda constante hasta el día siguiente. |
| 2) | $N/10 : N/20$ | ϵ (cal) a $16^\circ = 0.0159$ volts |
| | | ϵ (obs) = 0.0160 y queda constante. |
| 3) | $N/10 : N/400$ | ϵ (cal) a $15^\circ = 0.0862$ volts |
| | | ϵ (obs) = 0.0861 y queda constante. |
| 4) | $N/10 : N/1000$ | ϵ (cal) a $15^\circ = 0.1095$ volts |
| | | ϵ (obs) 0.1095 |

5)	$N/10 : N/2000$	
ϵ (obs) 0.1246	$t^\circ 12^\circ$	ϵ (cal) 0.1249 volts
6)	$N/10 : N/4000$	
ϵ (obs) 0.1440	$t^\circ 15^\circ$	ϵ (cal) 0.1434 volts
7)	$N/10 : N/100,000$	
ϵ (obs) 0.2290	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.2295 volts

En esta cadena, los extremos de las tirillas de papel, deben estar distanciados en la ampolla de dos a tres milímetros.

8)	$N/10 : N/200,000$	
ϵ (obs) 0.2420	$t^\circ 15^\circ$	ϵ (cal) 0.2405 volts

Hubo que esperar después de humedecidas y adosadas a la ampollita las tirillas de papel, cinco minutos para obtener el dato consignado. El capilar de Lippmann es escasamente sensible al milivolts.

9)	$N/10 : N/1,000,000$	
ϵ (obs) 0.2790	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.2813 volts
Colocando los papeles a tres milímetros de distancia.		
10)	$N/100 : N/800$	
ϵ (obs) 0.0511	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0605
11)	$N/100 : N/1000$	
ϵ (obs) 0.0559	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0557
12)	$N/100 : N/5000$	
ϵ (obs) 0.0960	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0957
13)	$N/100 : N/100,000$	
ϵ (obs) 0.1690	$t^\circ 15^\circ$	ϵ (cal) 0.1695
14)	$N/100 : N/200,000$	
ϵ (obs) 0.1850	$t^\circ 15^\circ$	ϵ (cal) 0.1867
15)	$N/100 : N/500,000$	
ϵ (obs) 0.2115	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.2101

Los papeles están distanciados de dos a tres milímetros. El capilar, al principio, muéstrase poco sensible.

16)	$N/1000 : N/500,000$	
ϵ (obs) 0.1555	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.1540
ϵ (obs) 0.2290	$t^\circ 15^\circ$	ϵ (cal) 0.2278 volts

18)	$N/2000 : N/1,000,000$	ϵ (cal) 0.1546
ϵ (obs) 0.1560		
19)	$N/2000 : N/100,000,000$	ϵ (cal) 0.2692
ϵ (obs) 0.2670		

En las soluciones muy diluídas, exige esperar cinco minutos para tomar las primeras determinaciones, pues es el tiempo requerido para que se establezca contacto entre las dos soluciones.

Las pequeñas diferencias entre lo calculado y lo observado, se debe, más que todo, al hecho de no haber utilizado medidas controladas

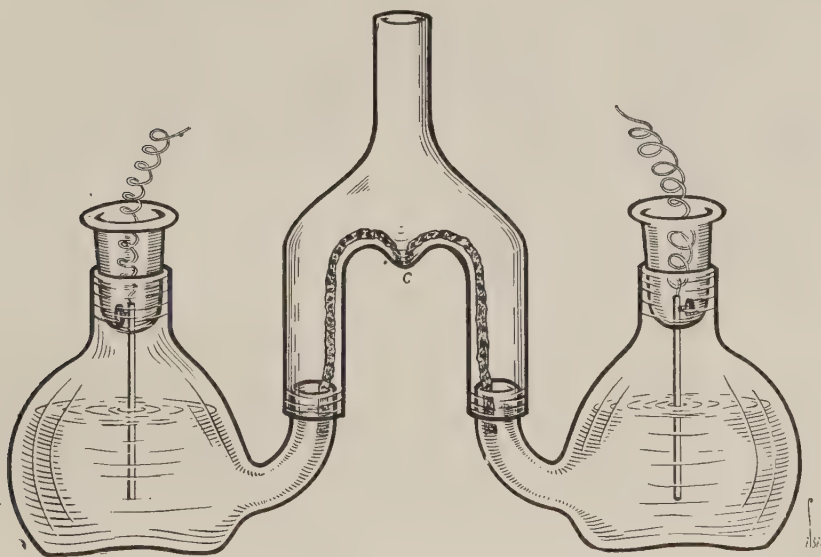


FIG. 7.

para hacer las respectivas diluciones. Además, en los datos calculados, no hice el descuento del 1 %, en el grado de disociación de las sustancias, tal como lo indica *Tabellen* por Landolt Börnstein. Y para calcular el grado de disociación, lo hice con los datos de la conductibilidad a 18° que da el libro recientemente citado.

Cuando en el laboratorio hubo 18° de temperatura ambiente, hice soluciones normales tomando todas las precauciones debidas en dos cadenas $N/100:N/1000$ y $N/20:N/500$, obteniendo datos idénticos al calculado según la fórmula de Nernst.

Cuando he querido determinar la total fuerza electromotriz (sin eliminación del potencial de difusión) he usado un puente análogo,

de ramas más cortas. La curva *c* del puente debe quedar de 1 a 3 milímetros por encima del nivel de las soluciones. En la forma indicada (fig. 8).

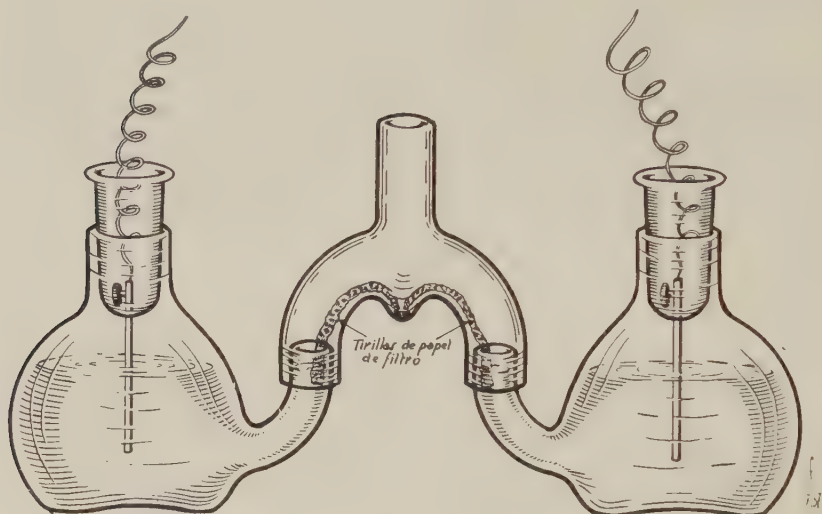


FIG. 8.

CON ELECTRODOS DE CU

Al mismo tiempo que buscaba un dispositivo para obtener el potencial exacto en cadena de concentración con electrodos de Ag y AgNO_3 , ensayé con electrodos de Cu y $\text{SO}_4\text{Cu}, 5\text{H}_2\text{O}$, cuya diferencia en la movilidad de los iones es mayor:

$$\frac{1}{2} \text{ Cu} = 46 \quad ; \quad \frac{1}{2} \text{ SO}_4' = 68 \quad ; \quad \text{Ag}_+ = 54,3 \quad ; \quad \text{NO}_3' = 61,7$$

Trabajé con electrodos de cobre electrolítico; para la obtención de éste emplí la fórmula siguiente de Erich Müller:

125 grs. de $\text{Cu SO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
 50 grs. de H_2SO_4 conc.
 50 grs. de alcohol y agua destilada.

Los hilos de cobre, antes de la electrólisis, tuvieron 1,3 mm. de diámetro; después de la electrólisis (48 horas) 2 mm. de diámetro, los que alisé con papel de lija, papel esmeril algo grueso y, por últi-

mo, papel esmeril fino. Una vez limpios y lisos, soldaba a las tapas de las botellitas representada en la figura 9. Las tapitas son algo alargadas, a fin de que todo el electrodo de cobre se sumerja por completo en la solución. El Cu se oxida fácilmente. Debe conservarse los electrodos completamente sumergidos en una solución diluída de SO_4Cu , por ejemplo, solución $N/10$. Las botellitas eran de vidrio « Pyrex ».

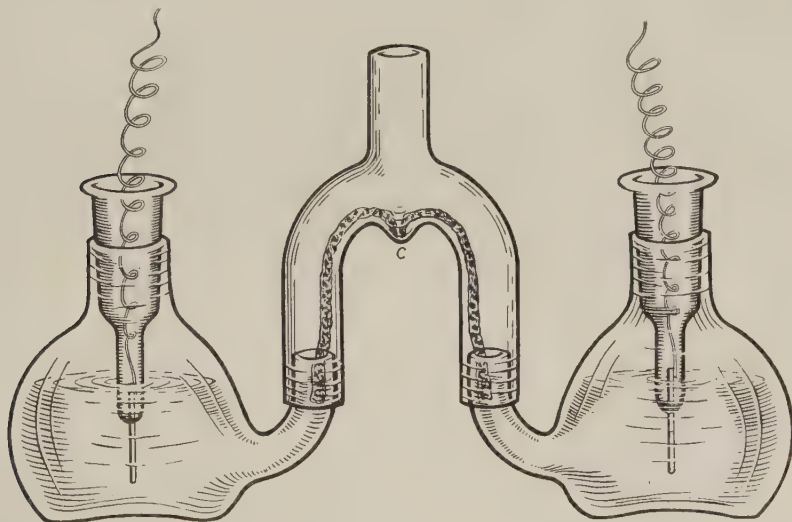


FIG. 9.

Los electrodos de cobre no deben limpiarse con alcohol, ni humedecer el papel de filtro con esa substancia. No consignaré todos los detalles, ni los números de las primera experiencias que me han sugerido esas observaciones, por creerlas innecesarias.

Cadenas de contracción con SO_4Cu :

1)	$N/10 : N/100$	
ϵ (obs) 0.0225	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0225 volts
queda constante.		
2)	$N/100 : N/1000$	
ϵ (obs) 0.0254	$t^\circ 26^\circ$	ϵ (cal) 0.0255 volts
3)	$N/10 : N/10.000$	
ϵ (obs) 0.0750	$t^\circ 16^\circ 5$	ϵ (cal) 0.0746 volts
4)	$N/10 : N/1000$	
ϵ (obs) 0.0468	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0472 volts
5)	$N/100 : N/10.000$	
ϵ (obs) 0.0525	$t^\circ 16^\circ$	ϵ (cal) 0.0529 volts

Como se ve, los resultados son casi iguales a los calculados. Las pequeñas diferencias atribuyo más bien a errores en la dilución, etc., como dije anteriormente.

Con el arco (ver fig. 4) obtuve los siguientes resultados en la cadena:

$N/100 : N/1000 \text{ t}^{\circ} 26^{\circ}$		
15 h. 20'	ϵ (obs) 0.0250	ϵ (cal) 0.0255 volts
15 h. 40'	$\epsilon \quad > \quad 0.0250$	
15 h. 50'	$\epsilon \quad > \quad 0.0254$	

Como se ve, con el arco (fig. 4), se debe esperar un cierto tiempo, en este caso, media hora, para obtener el dato exacto. Con el puente representado en la figura 9, se obtiene de inmediato la cifra buscada y queda constante.

CON ELECTRODOS DE CALOMEL

Para utilizar el dispositivo que preconizo, sin líquidos intermedios, en electrodos de calomel, he tenido que colocar tal como lo muestra la figura 10.

Determiné con los electrodos de calomel el valor del potencial de soluciones conocidas. Así: con el dispositivo descripto:

$N/10 : N/100$	$t^{\circ} 17^{\circ}$
22 de oct.	
14 h. 40' ϵ (obs) 0.0555	
14 h. 45' $\quad > \quad 0.0557$	
15 h. 15' $\quad > \quad 0.0557$	
17 h. $\quad > \quad 0.0557$	
17 h. 10' $\quad > \quad 0.0557$	
22 de oct. $t^{\circ} 17^{\circ} 8$	(cal) 0.0556 volts
12 h. ϵ (obs) 0.0557 volts	
28 de oct. la misma cadena ϵ (obs) 0.0705.	

De manera que obtengo un dato exacto y constante hasta tres días después de haber iniciado la experiencia y dejando el medio de unión en su sitio.

$N/10 : N/1000$	$t^{\circ} 18^{\circ} 5$
Otra cadena: ϵ (obs) 0.1126	ϵ (cal) 0.1124

El potencial 0.1126 quedó estable, es decir, que tomada la determinación de tiempo en tiempo, he obtenido el mismo dato 0.1126 volts.

La diferencia entre lo observado y lo calculado, atribuyo más bien a errores de dilución. Con esta misma cadena he determinado cloruros en agua potable.

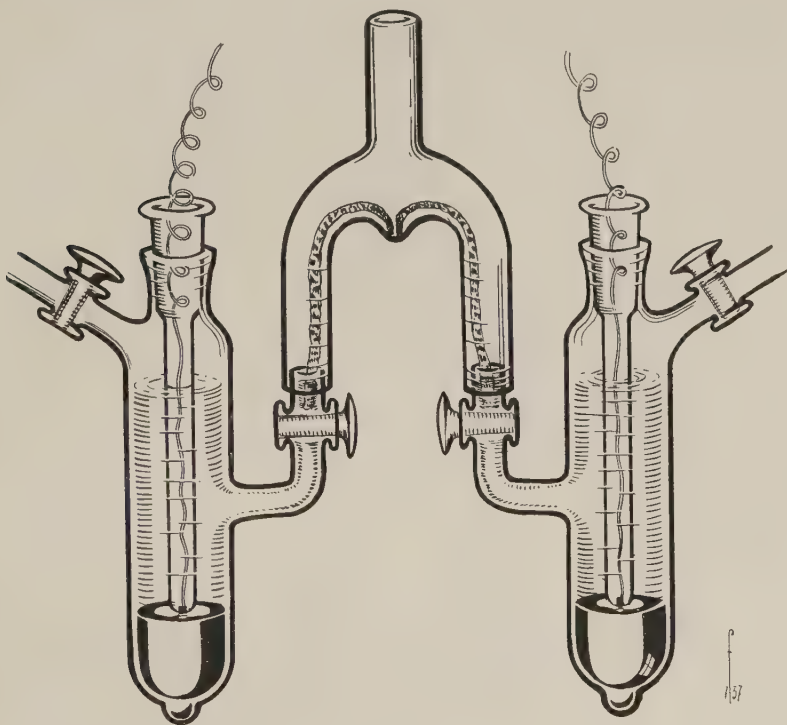


FIG. 10.

CON ELECTRODOS DE HIDRÓGENO

Como está comprobado mundialmente que la solución concentrada de KCl —líquido intermediario— elimina el potencial de difusión, utilizando o no los conductores de agar-agar y ClK; he comparado en estas cadenas este medio de unión con el puente que preconizo.

Hice las dos soluciones tipos que indica Michaelis:

A) 50 cm³ de Na(OH)_{n1} más 100 cm³ de CH₃COOH_{n1} más 350 1/10 *n* de ácido acético más 1/10 *n* de acetato de sodio (Standardazetal).

B) 5 cm³ de HCl *n*/10 más 195 cm³ de KCl *N*/10, es decir una solución 1/400 *n* de HCl, que tiene un contenido en Cl⁻ igual a 1/10 *n*.

A CONTRA B

Uso como líquido de unión una solución concentrada de KCl y conductores de agar-agar, tal como indica Michaelis.

Los electrodos de platino los ennegrecí muy bien con musgo de platino. Coloco las soluciones en los aparatitos piriformes y hago pa-

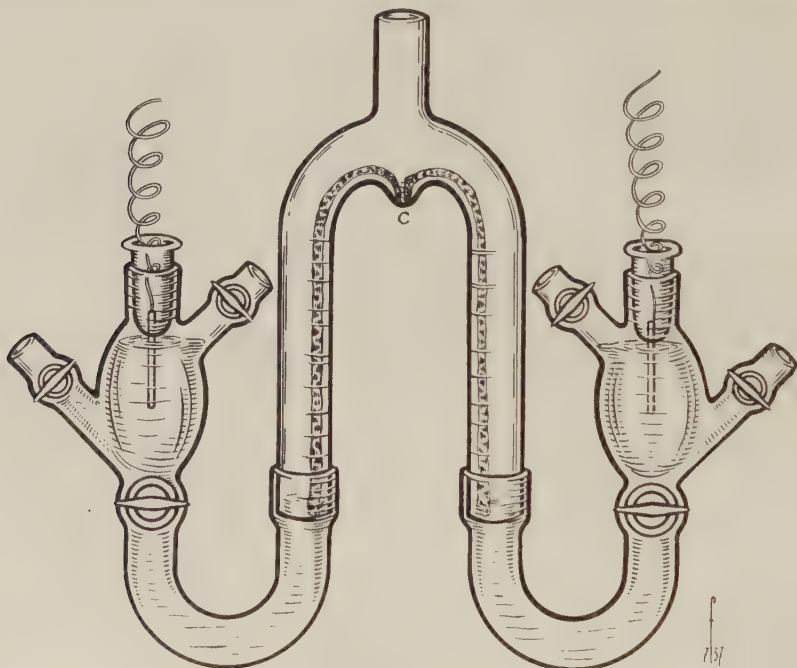


FIG. 11.

sar la corriente de hidrógeno durante cinco minutos a cada uno, cuidando que la corriente de hidrógeno sea rápida.

	ϵ (obs)	0.1136 volts
Después de 5'	>	0.1140 >
" > 5'	>	0.1143 >
" > 5'	>	0.1144 >
" > 5'	>	0.1144 >
" > 5'	>	0.1144 >
" > 5'	>	0.1144 >

Estos son valores óptimos, comparado con el de Michaelis, a 18° de 0.1140 volts.

Colocado mi puente, tal como lo indica la figura 11, obtuve —no bien adosé los extremos de las tirillas de papel de filtro a la ampollita *c*— un dato constante: $E = 0.1144$ volts Tuve precaución que las ramas del puente estén verticales.

Determiné el potencial en la cadena de ácido clorhídrico, cuyo potencial de difusión es grande, por ser considerable la diferencia de velocidad de sus iones: H^+315 ; $Cl^-65.6$.

HCl $n/10$: $n/100$ HCl con corriente de hidrógeno, utilizando mi puente.
 ϵ (obs.) 0.0573 a 23° y queda constante; ϵ (cal.) 00.572 volts.

Utilicé el electrodo de calomel saturado en la siguiente cadena, unida con solución concentrada de ClK .

Solución Standarda etal: Elect. de calomel sat.

Hora de observación	ϵ (obs.) $t^\circ 24^\circ$	Hora de observación	ϵ (obs.) $t^\circ 24^\circ 8$
18 h. 25'	0.1540 volts	19 h. 10'	0.5166 volts
18 h. 33'	0.5160 »	19 h. 15'	0.5170 »
18 h. 40'	0.5163 »	19 h. 20'	0.5170 »
19 h.	0.5164 »	19 h. 25'	0.5170 »
19 h. 5'	0.5166 »	19 h. 30'	0.5170 »

Michaelis consigna 0.5160 volts a 18° de manera que el valor de 0.5170 a $24^\circ 8$ es exacto. Como se ve, para obtener ese guarismo constante, ha sido necesario esperar una hora.

En cambio, con mi dispositivo (fig. 12), obtuve 0.5166 y antes de los cinco minutos 0.5170 , y queda constante.

Otras cadenas:

— H_2SO_4 $N/10$: Elect. de calomel saturado + (fig. 12)

ϵ (obs): después de un cierto tiempo da 0.3156 con líquido (ClK saturado) intermediario.

ϵ (obs) = 0.3156 con nuestro dispositivo fig. 12, que inmediatamente queda constante.

— H_4SO_4 $n/100$: Electrodo calomel saturado +

Con iguales consideraciones que la anterior:

ϵ (obs) 0.3705 volts, con líquido intermediario.

ϵ (obs) 0.3075 volts, con nuestro dispositivo.

$0.3075 - 0.3156 = 0.0549$ volts.

Medida de la diferencia de potencial directamente (fig. 11), sin ayuda del electrodo de calomel, obtuve con uno y otro dispositivo 0.0549 volts a 25° :



ϵ (obs) 0.0549 volts a 25

Se observa que el H_2SO_4 se comporta como monovalente. El dato calculado, según la conductibilidad dada por las tablas de Landolt a 25° es de 0.0510 volts.

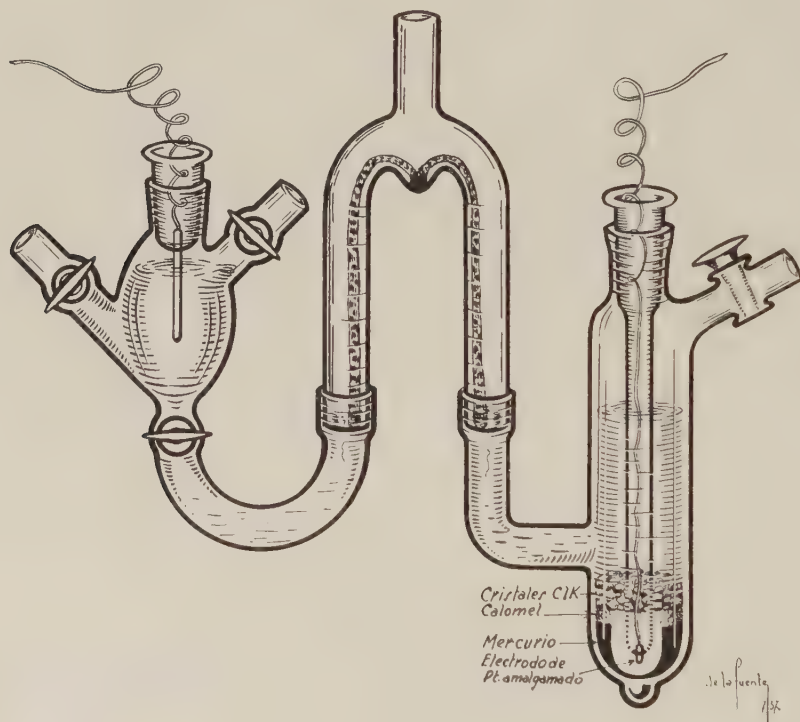
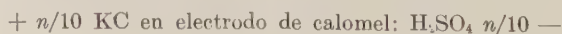


FIG. 12.

Esta determinación he repetido muchas veces, controlando cuidadosamente cada resultado, y siempre obtuve el mismo valor.

En vez de utilizar el electrodo de calomel concentrado, utilizo el electrodo de calomel $n/10$



Con el dispositivo descripto (fig. 6), sin líquido intermediario, colocando las dos ramas del puente verticales, que es uno de los requisitos indispensables:

$$15 \text{ h. } 35' \text{ } \epsilon \text{ (obs)} = 0.04640 \text{ volts } t^{\circ} 17^{\circ} 5$$

$$15 \text{ h. } 36' \text{ } \epsilon \text{ (obs)} = 0.4647 \text{ volts}$$

y queda constante. Con solución de KCl concentrado como líquido intermediario, obtuve el mismo potencial después de 20'.

+ N/10 KCl en electrodo de calomel: H_2SO_4 N/100

$$15 \text{ h. } 45' \text{ } \epsilon \text{ (obs)} 0.5197 \text{ sin líquido intermedio}$$

$$15 \text{ h. } 50' \text{ } \epsilon \text{ (obs)} 0.5197 \text{ sin líquido intermedio}$$

y después de tres días que la misma cadena quedó unida con el puente (fig. 6):

$$\epsilon \text{ (obs)} = 0.5197 t^{\circ} 16^{\circ} 8$$

La diferencia de potencial entre las soluciones

$$\text{H}_2\text{SO}_4 \text{ } n/10 \text{ y } \text{H}_2\text{SO}_4 \text{ } n/100 \text{ será } 0.5197 - 0.4647 = 0.0550 \text{ volts a } 17^{\circ}.$$

La cadena colocada como indica la figura 11

$$+ \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } n/10 : \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } n/100$$

dió con ambos dispositivos 0.0550 volts a $17^{\circ}3$.

$$+ \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } N/50 : \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } N/1000$$

$$\epsilon \text{ (obs)} \text{ a } 20^{\circ} 0.0726 \text{ volts con ambos dispositivos.}$$

$$\epsilon \text{ (cal)} \text{ a } 20^{\circ} 0.0697 \text{ volts.}$$

$$+ \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } n/50 : \text{H}_2 \text{SO}_4 \text{ } n/2000$$

$$\text{(obs)} \text{ a } 20^{\circ} 0.0873 \text{ volts con ambos dispositivos.}$$

$$\text{(cal)} \text{ a } 20^{\circ} 0.0867 \text{ volts.}$$

+ Electrodo de calomel saturado: $n/100$ de HCl fig. 12

$$\epsilon \epsilon \text{ (obs)} 0.3165 \text{ volts con el puente fig. 6}$$

Electrodo de calomel KCl sat. + : HCl $n/1000$ —

$$\epsilon \epsilon \text{ (obs)} 0.3717 \text{ volts.}$$

El potencial de ambas soluciones clorhídricas:

$$n/100 \text{ HCl} : n/1000 \text{ HCl}$$

será: $0.3717 - 0.165 = 0.0572$ volts, que es igual al dato que obtuve directamente, es decir, sin electrodo de calomel.

Determiné el PH de una solución de ClNa al 8,5 %, colocando esta solución contra electrodo de calomel saturado, y uniendo con conductores de agar-agar y solución concentrada de KCl. En esta forma y con mi dispositivo (fig. 12) obtuve $\text{PH} = 6,75$.

A 100 cm^3 de la solución al 8,5 % de ClNa, agregué $0,5 \text{ cm}^3$ de $\text{Na}(\text{OH})$ $n/1000$ y en este líquido determino PH, que con ambos dispositivos da:

$$\text{PH} = 7.16 \text{ a } 23^\circ$$

El plasma total de conejo, con ambas disposiciones de unión, obtengo:

$$\text{PH} = 7.59 \text{ t } 23^\circ$$

Suero normal de caballo, con ambos dispositivos:

$$\text{PH} = 7.41 \text{ a } 24^\circ$$

ELECTRODOS DE QUINHIDRONA

La quinhidrona es una sustancia orgánica que reemplaza con éxito la corriente de hidrógeno, cuando se quiere determinar acidez real o alcalinidad real, siempre que ésta no pase de $\text{PH} = 8,5$.

Si añadimos quinhidrona al ácido que se trata de valorar (4 centigramos, más o menos, para 10 a 15 centímetros cúbicos de solución, fig. 7), entre los componentes de la quinhidrona (quinona e hidroquinona y el H_2 , se establece el equilibrio:



La quinhidrona es poco soluble; 4 centigramos saturan a 15 cm^3 de solución, lo que da lugar a una presión fija de hidrógeno en la disolución.

Colocando las soluciones tal como indica la figura 7, podemos determinar el potencial en breve tiempo. El alambre de plata debe ser reemplazado por alambre de platino en cada electrodo.

Así en la cadena $\text{HCl } n/10 : \text{HCl } n/100$, obtuve 0.0572 volts, o sea el mismo dato encontrado cuando utilicé corriente de hidrógeno y musgo de platino. Empleando quinhidrona es indiferente que el platino sea lámina, alambre limpio o con musgo de platino, pues con cualquiera de ellos encontré idénticos valores.

EXCEPCIÓN

El puente que preconizo no dió resultado satisfactorio en la siguiente cadena, colocada como indica la figura 10:



cuya fuerza electromotriz se debe casi exclusivamente al potencial de difusión por ser iguales las concentraciones de ion cloro en ambos extremos. Con el dispositivo propuesto no obtuve un dato constante; en este caso, como dije, no elimina el potencial de difusión.

En cambio, unida directamente las soluciones por medio de un sífon, obtengo 0.027 volts; y uniendo no con sífon, sino con conductores de agar-agar en solución saturada de KCl, obtuve 0.001 volts, es decir que éste elimina el potencial de difusión.

* * *

Sin tener en cuenta esta excepción, en que se mide la f. e. de dos soluciones distintas y si nos atenemos a las experiencias realizadas con soluciones de electrolitos iguales pero de diferente concentración, podremos concluir que:

1) El puente de unión, con las tirillas, tal como se ha descripto, evita líquidos intermediarios para eliminar el potencial de difusión.

2) Da en la gran mayoría de los casos inmediatamente el valor calculado y queda consante.

3) Es un dispositivo general, pues nos ha servido en cadena de concentración con sales: AgNO_3 ; CuSO_4 ; en la determinación de ácidos: H_2SO_4 , HCl y en álcalis: NaOH diluída y suero normal de caballo.

4) Los resultados son reproductibles; con las mismas soluciones obtuvimos valores idénticos.

5) Las diferencias de los datos experimentales con los calculados atribuyo a errores en las diluciones y a que en el « calculado » me he servido de los datos referentes a la conductibilidad, consignados en la Tabla de Landolt a 18° únicamente y no hice el descuento de 1 % que para calcular el grado de disociación indica este autor.

6) Es posible la determinación cuantitativa de ciertos elementos químicos en cadena de concentración.

7) En la ampollita *c* (fig. 6), punto de contacto de las dos semipilas, se forma una lámina líquida (constituída con la mezcla de ambas soluciones). Interviene, por lo tanto, la tensión superficial, cuya energía posiblemente sea equivalente al potencial de difusión, anulándolo.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

(Continuación *)

CAPÍTULO III

§ 7. - PERMANENCIAS Y CADENAS DE PERMANENCIAS DE UNA MATRIZ.

En los capítulos precedentes hemos visto que un sistema $S_h(m, n)$ compatible, define una *región poliédrica convexa* de un espacio euclídeo de n dimensiones. La región queda unívocamente determinada por el sistema y por todos los sistemas equivalentes a él. Esto significa, (3, VIII), que los coeficientes y términos independientes de las inecuaciones principales del sistema, pueden ser dados a menos de un factor positivo arbitrario para cada una.

Del mismo modo, (20, I), dado un sistema resolvente principal de un $S_h(m, n)$, queda determinada una *figura poliédrica convexa* de n dimensiones que está definida, (8), por la región del sistema $S_h(m, n)$ y las regiones de todos los sistemas iguales a él.

Así, pues, si de cada una de las inecuaciones principales de un $S_h(m, n)$ compatible, prescindimos de un factor positivo arbitrario, obtenemos infinitos sistemas, $S_h(m, n)$, que definen la misma región que el sistema dado. Si, en cambio, prescindimos de los coeficientes en sí y conservamos los coeficientes y términos independientes de un sistema resolvente del $S_h(m, n)$, que son, (7), determinantes de orden h y de orden $h + 1$ de su matriz, obtenemos infinitos sistemas, $S'_h(m, n)$, que tienen la misma figura que el sistema dado. Tanto la región, como la figura de los $S_h(m, n)$, están, pues, determinadas mediante *relaciones métricas*.

(*) Véase pág. 381, Entrega VI, Tomo CXXII, Diciembre 1936.

Veremos, en este capítulo que es posible hacer una ulterior abstracción, conservando solamente relaciones de *signo* y de *anulación* entre ciertos determinantes de orden h y de orden $h + 1$ de la matriz de un sistema $S_h(m, n)$. Resultan también infinitos sistemas que cumplen tales relaciones. Todos ellos no tienen, necesariamente, la figura del sistema dado, pero tienen todavía algo común con ella, el cual los distingue de todos los demás sistemas, $S_h(m, n)$, que no las satisfacen; ese algo común es, precisamente, la *forma* de la *figura*.

De estas ulteriores relaciones dependen todos los caracteres *morfológicos* de las figuras poliédricas convexas. En función de esas relaciones viene expresada la *ley general*, según la cual se agrupan las inequaciones de dichos sistemas para formar los elementos límites de las correspondientes figuras geométricas, es decir, las figuras de sus sistemas subordinados compatibles: *vértices*, *aristas*, *caras*, etc., las cuales, a su vez, determinan eso que llamamos vagamente *forma de la figura geométrica convexa*. Esta noción será perfectamente precisada en base a las mencionadas relaciones y solamente a ellas, en el presente capítulo y en el siguiente.

21. Permanencias de una matriz. — Consideremos una matriz

$$M_h(m, n) = \parallel a_{ij}, c_i \parallel \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \dots, m \\ j = 1, 2, 3, \dots, n \end{pmatrix}$$

compuesta de m filas i , $n + 1$ columnas j , y de elementos reales a_{ij} y c_i . La característica h , de la matriz

$$M'_h = \parallel a_{ij} \parallel,$$

se dirá también *característica* de la matriz $M_h(m, n)$. Esta última suele llamarse *matriz ampliada* de la M'_h , con la columna c_i . Una matriz ampliada de m filas i , de $n + 1$ columnas j y de característica h , se dirá una *matriz de tipo* (m, n) y característica h .

Cuando sólo se da el tipo de una matriz y su característica, h , escribiremos, $T_h(m, n)$.

Es claro que la igualdad

$$T_h(m, n) = T_h(n, m)$$

no es posible sino cuando sea $m = n$, en cuyo caso, se dice que la matriz es de *tipo cuadrado* o, simplemente, *cuadrada*.

Toda matriz $M_h(m, h)$, de característica h , formada por todas las filas y por h columnas dadas de la matriz $M_h(m, n)$, se dirá una *matriz principal* de la $M_h(m, n)$, relativa a tales columnas. Una matriz principal, $M_h(m, h)$, de $M_h(m, n)$, ampliada con la última columna c_i , de ésta, se dirá *matriz principal ampliada* de $M_h(m, n)$.

Diremos *determinante de orden h* , de una matriz principal ampliada, a todo determinante formado por las h primeras columnas y h filas de ella.

Teniendo en cuenta estas definiciones y las del número (1), toda matriz $M_h(m, n)$, puede ser considerada como una matriz de sistemas normales, $S_h(m, n)$, de coeficientes a_{ij} y términos independientes c_i . Diremos, por esto indistintamente, que el sistema $S_h(m, n)$, *tiene* la matriz $M_h(m, n)$, o que *pertenece* a ella.

NOTA: Como en todo lo que sigue utilizaremos, con mucha frecuencia, el signo de un número, de una función, etc., convendremos en que la expresión *signo de x* , (*Sg. x*), implica que es $x \neq 0$.

Dada una matriz, $M_h(m, n)$, de característica $h > 0$, consideremos una matriz ampliada, $M_h(m, h)$, principal, relativa a h columnas prefijadas de ella.

Diremos que h filas de una matriz principal ampliada, $M_h(m, h)$, constituyen una *permanencia* de ella, si el determinante de orden h , formado por dichas filas y todos sus orlados, tienen el mismo signo.

Toda matriz principal, en la cual sea $m = h$, carece de determinantes orlados. En este caso diremos que sus h filas forman siempre una *permanencia* de ella.

La característica, h , de la matriz se llama, en ambos casos, *orden* de la permanencia; el determinante δ , formado por sus filas, *determinante* de la permanencia y el signo de éste, *signo*, de la permanencia.

Las permanencias de orden *uno*, *dos*, *tres*, etc., se dirán, también, respectivamente, *permanencias unitarias*, *binarias*, *ternarias*, etc.

De las definiciones precedentes y de (4; a , b), resulta inmediatamente:

I) La condición necesaria y suficiente para que h filas de toda matriz principal ampliada, $M_h(m, h)$, de una matriz, $M_h(m, n)$, de característica h , formen una *permanencia* de $M_h(m, h)$, es que su determinante, δ , sea determinante principal de algún resolvente, $R_h(\delta)$, regular, de todo sistema, $S_h(m, n)$, perteneciente a la matriz dada, $M_h(m, n)$.

Puesto que, (8, VI), los resolventes de un sistema no dependen de la matriz elegida, se tiene:

II) Si h filas de la matriz, $M_h(m, n)$, forman permanencia de una matriz principal ampliada, $M_h(m, h)$, de la matriz dada, esas h filas forman también una permanencia de cualquier otra matriz principal ampliada de la $M_h(m, n)$.

Esta propiedad justifica la siguiente definición:

Diremos que h filas de una matriz, $M_h(m, n)$, de característica $h > 0$, constituyen una *permanencia* de dicha matriz, cuando forman una permanencia de alguna matriz principal ampliada, $M_h(m, h)$, de la dada.

Estas definiciones exigen que la característica de la matriz sea, por lo menos, igual a uno. Pero las propiedades del número (3) permiten generalizar el concepto de permanencia también a una matriz de característica $h = 0$, es decir, nula. En efecto, de (3, V, VI), se desprende que:

III) A toda matriz $\|a_{ij}, c_i\|$, en la cual son nulos los a_{ij} y no negativos los c_i , pertenecen sistemas idénticos y recíprocamente.

Diremos, en este caso, que cualquier número de filas de la matriz constituye una *permanencia de orden nulo* ($h = 0$). Para distinguirla de las demás, la llamaremos *permanencia idéntica* y la designaremos con la notación $\{0\}$.

IV) Una permanencia no depende del orden en que se consideren sus filas, porque cambia o no, al mismo tiempo, el signo de su determinante con el de sus orlados, si los tiene. Si no tiene orlados, basta que su determinante no sea nulo.

Una permanencia de orden $h > 0$, de una matriz $M_h(m, n)$, está, pues, determinada, cuando se dan las h filas $a_1, a_2, \dots, a_h$, que la forman. El signo de su determinante, $\delta = (a_1 a_2 \dots a_h)$ no interesa en sí, sino en relación con los signos de otras permanencias de la misma matriz. Como en esta comparación intervienen también los signos de los determinantes orlados, convendremos en decir, para abreviar, que dos permanencias tienen un *orlado común* cuando éstos están formados por las mismas filas pudiendo diferir en el orden.

Designaremos una permanencia no idéntica, dada por las filas $a_1, a_2, \dots, a_h$, de una matriz $M_h(m, n)$, con la notación $\{a_1 a_2 \dots a_h\}$. Cuando interese, además, el signo, lo daremos por su determinante.

Ejemplo 1:

Si en una matriz, $M_3(5, n)$, de característica $h = 3$, compuesta de cinco filas designadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, — las columnas no interesan, (II), — las filas 1, 2, 3 forman una permanencia, la notación $\{123\}$ significa que:

$$Sg. (123) = Sg. (1234) = Sg. (1235).$$

Es claro que dada una permanencia, queda prefijada una sola igualdad de signos entre su determinante y los de todos sus orlados. Con frecuencia, no interesa conocer, efectivamente, el signo de una permanencia, sino solamente compararlo con el signo de otra permanencia de la misma matriz. Para facilitar el cotejo y, por razones de brevedad, las dispondremos en forma de cuadro, como se aclara en el siguiente

Ejemplo 2:

Sea también $\{124\}$, otra permanencia de la misma matriz a la que pertenece la $\{123\}$ del ejemplo precedente.

Escribiéndolas en la forma:

123	124
1234	1243
1235	1245

podemos concluir, inmediatamente que dichas permanencias tienen signos contrarios, puesto que

$$Sg. (1234) = - Sg. (1243).$$

Cuando de una permanencia no interesen más que algunos de sus elementos: orden h , determinante δ , etc., la designaremos brevemente con notaciones de la forma: $P_h(\delta)$; P_h ; $P(\delta)$, o simplemente con P .

22. Permanencias conjugadas. Diremos que dos permanencias de igual orden $P_h(\delta)$, y $P'_h(\delta')$, de una misma matriz, de característica $h > 1$, son *conjugadas*, si tienen $h-1$ filas comunes.

Dos permanencias de orden $h = 1$, *unitarias*, de una misma matriz, se considerarán, por convención, como permanencias *conjugadas*. Dos permanencias *idénticas* cualesquiera, las consideraremos también, como permanencias *conjugadas*.

La existencia de pares de permanencias conjugadas, en una misma matriz, está asegurada por (17, IV), puesto que sus correspondientes determinantes son, (21, I), determinantes principales de algún $R_h(\delta)$, regular de todo $S_h(m, n)$, que tiene dicha matriz.

Pero probaremos que:

I) Toda permanencia, $P_h(\delta)$, de orden h , de una matriz, tiene, a lo sumo, en ésta, h permanencias conjugadas.

En efecto, basta considerar, (21, I), el determinante δ del resolvente propio $R_h(\delta)$ regular, de todo $S_h(m, n)$ finito que tenga la dada

matriz, en cuyo caso, (17, X), la correspondiente permanencia, tiene, en dicha matriz, $h-1$ permanencias conjugadas. Y es claro que no puede tener más de este número por ser $\binom{h}{h-1} = h$. Pero puede tener menos si el $S_h(m, n)$, no es finito y hasta puede no haber ninguna permanencia conjugada de $P_h(\delta)$, en la dada matriz, si el correspondiente $R_h(\delta)$ es impropio; es decir, si el sistema se reduce a h filas principales.

II) *No existen, en una misma matriz, más de dos permanencias de orden $h > 1$, con $h-1$ filas comunes.*

Es inmediata consecuencia de (21, I) y de (17, VII).

III) *La condición necesaria y suficiente para que dos permanencias de orden $h > 1$, de una misma matriz, sean conjugadas, es que tengan un orlado común.*

En efecto, si son conjugadas, solamente difieren en una fila. Es decir, en cada una hay una fila que no figura en la otra. Luego sus respectivos orlados con estas filas son comunes. Recíprocamente; si $h+1$ filas de la matriz forman orlados de dos permanencias de ella, como éstas son de orden h , tienen necesariamente, $h-1$ filas comunes, luego son conjugadas.

En particular:

IV) *Todas las permanencias conjugadas de una misma permanencia de orden $h > 1$, de una matriz, pertenecen al $R_h(\delta)$ principal de todo sistema, $S_h(m, n)$, que tiene esa matriz, puesto que todos los determinantes de orden $h > 1$ que tienen $h-1$ filas comunes con δ , pertenecen, (7), a $R_h(\delta)$.*

OBS.: El concepto de permanencia de orden h , corresponde, geoméricamente, a un vértice de la figura convexa h -dimensional del espacio de puntos E_h ; pues las h filas que la constituyen representan los h -hiperplanos de E_h que concurren a dicho vértice.

El significado geométrico de dos permanencias conjugadas, corresponde al de pares de vértices con una arista común.

Ejemplo:

Así, en el ejemplo 1, del número 20, las filas 1, 2, 3 ; 1, 2, 5 ; 1, 3, 4 ; y 2, 3, 5, se agrupan formando permanencias. Es decir, los correspondientes planos que ellas representan, asociados de ese modo, forman vértices de la figura. Las permanencias $\{1\ 2\ 3\}$ y $\{1\ 2\ 5\}$, son conjugadas, pues tienen las filas 1, y 2 comunes. Esto significa que los vértices correspondientes tienen una arista común formada por la intersección de los planos 1 y 2.

Más adelante veremos cómo es posible generalizar este concepto de permanencia de modo que corresponda al caso geométrico singular de un vértice de una figura convexa h -dimensional de E_h , formado por más de h -hiperplanos.

23. Permanencias subordinadas de una permanencia. Estudiemos, ahora, las relaciones entre las permanencias de distintos órdenes de una misma matriz, o con más precisión, entre las permanencias de orden h , y las permanencias de orden inferior de las matrices fundamentales, (11), deducidas de la matriz dada.

Una primera propiedad resulta inmediatamente de (11, III y IV):

I) Si h filas dadas de una matriz, $M_h(m, n)$, de característica h , forman una permanencia P_h de orden h , y $s < h$ de esas filas, son las relativas a una matriz fundamental ampliada, M_{h-s} , de la dada, las $h-s$ filas restantes en M_{h-s} , forman también una permanencia P'_{h-s} de orden $h-s$ de M_{h-s} .

Recíprocamente:

II) Si en una matriz fundamental ampliada M_{h-s} , de la $M_h(m, n)$, relativa a $s < h$ filas dadas de ésta, $h-s$ filas de ella forman una permanencia, P'_{h-s} de orden $h-s$, las $h-s$ filas homólogas en $M_h(m, n)$ y las s dadas, forman también una permanencia P_h de orden h de la matriz $M_h(m, n)$.

Diremos que la permanencia P'_{h-s} , de la matriz fundamental M_{h-s} , es una permanencia subordinada de orden $h-s$, de la permanencia P_h dada, relativa a s filas prefijadas de ella.

Esta definición carece de sentido para $s \geq h$. Pero, cuando en este caso, entre las s filas dadas de la matriz $M_h(m, n)$, figuren las h filas de la permanencia P_h , también dada, en virtud de (11, V) y (21, III), se obtiene una permanencia idéntica que llamaremos permanencia subordinada de orden nulo, de la P_h , relativa a las $s \geq h$ filas dadas.

Puesto que, (11), todas las matrices fundamentales de una matriz, relativas a s filas dadas corresponden a sistemas subordinados iguales, resulta, (21, II), que:

III) Las permanencias subordinadas de una permanencia dada P_h , de $M_h(m, n)$, relativas a s filas dadas de ella, no dependen de cuál sea la matriz fundamental, M_{h-s} , elegida.

IV) Si $P_h(\delta)$ es una permanencia de orden $h > 1$, de una matriz, cada uno de los h grupos de $h-1$ filas suyas, es también una permanencia $P'_{h-1}(\delta')$ subordinada de orden $h-1$ de la dada y, recíprocamente, si cada uno de los h grupos de $h-1$ filas, formados con h filas dadas

de una matriz $M_h(m, n)$, de características $h > 1$, son permanencias de orden $h-1$ de las correspondientes matrices fundamentales, dichas h filas forman una permanencia P_h de $M_h(m, n)$.

En efecto, basta considerar, (21, I), el resolvente principal regular $R_h(\delta)$ de todo sistema $S_h(m, n)$ que tiene la dada matriz y recordar los teoremas (10, III, IV). Diremos que estas h permanencias, P_{h-1} , de orden $h-1$, son las *permanencias componentes* de la P_h .

Esta definición carece de sentido para $h = 1$; es decir, para permanencias unitarias. Pero, (11, V), como las matrices fundamentales tienen, en este caso, característica complementaria nula, (16), diremos que las componentes de una permanencia unitaria, son permanencias idénticas y, como las unitarias son las únicas que tienen componentes nulas, la presente generalización queda así perfectamente justificada.

En cuanto a las permanencias idénticas, carecen de componentes, desde que las matrices nulas no tienen matrices fundamentales.

En virtud de lo que precede, una permanencia P_h , puede ser dada también por todas sus permanencias componentes.

Ejemplos:

Si las filas 1, 2, 3, 4 constituyen una permanencia P_4 , de una matriz $M_4(m, n)$, sus 4 componentes son:

$$\{123\} ; \{124\} ; \{134\} ; \{234\}.$$

En el ejemplo 2, del número 20, la permanencia $\{12345\}$, de quinto orden, tiene por componentes:

$$\{1234\} ; \{1235\} ; \{1245\} ; \{1345\} ; \{2345\}$$

que son permanencias de cuarto orden.

En cuanto al significado geométrico, es muy simple.

Así, como (22-Obs.), a la permanencia $\{12345\}$, corresponde un *vértice*, véase la figura del mencionado número, a sus cinco permanencias componentes, corresponden las cinco *aristas* que, en el espacio de puntos E_5 , forman dicho vértice de la figura.

OBS.: Nótese que, si se da una permanencia por sus componentes, es preciso darlas todas, de lo contrario podría no quedar determinada. Así, las permanencias $\{12\}$ y $\{23\}$, de segundo orden, contienen las tres filas 1, 2 y 3, pero de ahí no se deduce que $\{123\}$ sea una permanencia de tercer orden de la matriz a que pertenecen esas tres filas, porque el determinante $\delta = (123)$ podría ser nulo.

Si P_h es una permanencia de orden $h > 1$, y $P_{h-1}^1, P_{h-1}^2, \dots, P_{h-1}^h$ son sus h permanencias componentes, escribiremos:

$$P_h = (P_{h-1}^1 \cdot P_{h-1}^2 \cdot \dots \cdot P_{h-1}^h).$$

Así, por ejemplo:

$$(\{12345\}) = (\{1234\} \{1235\} \{1245\} \{1345\} \{2345\}).$$

Para $h = 1$, resulta una sola permanencia idéntica. Se escribirá también:

$$P_1 = (\{0\}).$$

24. Cadena de permanencias de una matriz. Es claro que se presenta, ahora, con toda naturalidad, el problema de saber cómo se caracterizan los grupos de permanencias que corresponden a un mismo tipo de matriz de sistemas normales compatibles.

Diremos que un conjunto de permanencias de una matriz, constituye una *cadena de permanencias de la matriz*, cuando toda permanencia del conjunto tiene una conjugada en él.

Convendremos, por razones de comodidad, en considerar *cadena*, también al conjunto formado por una sola permanencia.

El número m , de filas, el número n , de columnas y la característica h , de la matriz, se dirán, respectivamente, *clase*, *dimensión* y *orden* de la cadena. Una cadena de clase m , orden h y dimensión n , se indicará con notaciones de la forma: $C_h(m, n)$, C_h , o simplemente C . Una cadena cuyas permanencias son todas idénticas, se dirá *cadena idéntica*. Se dirá *unitaria*, *binaria*, *ternaria*, etc., según que su orden, h , sea, respectivamente, 1, 2, 3, etc.

Cuando de una cadena, $C_h(m, n)$, interesen las permanencias $P_h^1, P_h^2, P_h^3, \dots, P_h^r$, que la componen, escribiremos:

$$C_h(m, n) = P_h^1 P_h^2 P_h^3 \dots P_h^r.$$

La existencia de matrices con cadenas de permanencias, resulta del teorema siguiente:

I) *El conjunto de todas las permanencias de la matriz, $M_h(m, n)$, de un sistema, $S_h(m, n)$, normal regular e irreducible, constituye una cadena de permanencias $C_h(m, n)$ de $M_h(m, n)$ de orden h y clase m .*

Puesto que la matriz del sistema tiene permanencias, éste, (21, I), es compatible. El teorema es inmediato, (22), si el sistema es idéntico,

$h = 0$; o si tiene resolvente impropio, en cuyo caso, (4, a), siendo $m = h$, su matriz consta de una sola permanencia. Si consta de más de una permanencia no idéntica, el sistema $S_h(m, n)$, tendrá, (21, I), más de un determinante principal; entonces, si es $h > 1$, hay (17, VI), dos que tienen $h-1$ filas comunes, los cuales corresponderán, por hipótesis, (7), a resolventes regulares; luego, (21, I), sus correspondientes filas constituyen, (22), dos permanencias conjugadas de $M_h(m, n)$. Si es $h = 1$, la conclusión también es cierta por definición. Repitiendo este razonamiento para todas las permanencias de la matriz $M_h(m, n)$, resulta el teorema, porque, por hipótesis, siendo regular el correspondiente sistema dado tiene, (7), todos sus resolventes principales regulares. La correspondiente cadena resulta, (21, I), de orden h , por ser de orden h los determinantes principales de éstos. Su clase es m porque el sistema $S_h(m, n)$, es irreducible; es decir, (9, IV), que toda fila suya pertenece a algún determinante principal del sistema y, por lo tanto, (21, I), a alguna permanencia de $C_h(m, n)$. Queda así probada la existencia de cadenas de permanencias.

Ahora bien, como en la definición de una cadena, $C_h(m, n)$, de una matriz ampliada, de la cual se da sólo su característica h y su tipo, $T_h(m, n)$, no interviene más que el número, m , de sus filas, su característica, h , y ciertas relaciones de signo entre sus determinantes de orden h y los de orden $h+1$, y estos determinantes, (6), no son todos independientes entre sí, no es posible afirmar, *a priori*, que existan matrices del tipo dado que admitan una prefijada cadena de permanencias formadas con sus filas.

El siguiente teorema contesta afirmativamente a la cuestión:

II) *Existen matrices, $M_h(m, n)$ de tipo dado, $T_h(m, n)$, que tienen una cadena prefijada, $C_h(m, n)$, de permanencias de orden h y clase m , formada con sus filas.*

El teorema es inmediato, (21, III), si la cadena $C_h(m, n)$, es idéntica. También lo es si la cadena consta de una sola permanencia.

Supongamos, entonces, que sea $h > 0$.

Sea $M_h(m, n)$ una matriz de característica h y de tipo $T_h(m, n)$, dado, cuyos elementos, a_{ij} y c_i , son, por lo tanto, indeterminados. Puesto que está dada la cadena $C_h(m, n)$, designemos las filas de esta matriz con los mismos números con que están designadas las filas de las permanencias de la cadena. Prefijemos, (21), arbitrariamente en la matriz, una matriz principal ampliada, $M_h(m, h)$, de ella. Sea P_h^1 una permanencia de $C_h(m, n)$.

Puesto que es $h > 0$, consideremos, en $M_h(m, h)$, un determinante δ_1 , de orden h , formado por las h filas de P_h^1 . Podemos lograr que δ_1 y todos sus orlados, si existen en $M_h(m, h)$, tengan el mismo signo. Esto es siempre posible, porque, en una matriz ampliada de característica $h + 1$, hay, [6.4],

$$N' = (h + 1) (m - h - 1) + 1.$$

determinantes independientes de orden $h + 1$, mientras que, en la precedente operación, solamente se fija la igualdad de signos de $m - h$ de ellos. Es decir, el de todos los orlados de δ_1 , número evidentemente menor que N' para $m > h > 0$. Si en $C_h(m, n)$, no hay más permanencias, el teorema está demostrado. En particular, si es, en este caso, $m = h$ basta, (21), que sea $\delta_1 \neq 0$.

Si la cadena consta de más permanencias existen en ella, por definición, permanencias conjugadas de P_h^1 . Probaremos que siempre será posible elegir, en $M_h(m, h)$ convenientemente los signos de cada determinante δ_i y los de sus orlados, de manera que δ_i sea el determinante de la correspondiente permanencia P_h^i , conjugada de P_h^1 en la cadena dada.

Sea, en primer lugar, $h = 1$. En este caso, (14, I), la cadena consta de dos permanencias. Será, (21), de la forma:

$$C_1 = \{1\} \{2\}.$$

Consideremos una matriz principal ampliada compuesta de dos filas 1 y 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}.$$

Se debe tener, (14, I),

$$Sg. a_{11} = Sg. \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad Sg. a_{21} = Sg. \begin{vmatrix} a_{21} & c_2 \\ a_{11} & c_1 \end{vmatrix}.$$

Relaciones siempre posibles de satisfacer de infinitos modos con valores reales de a_{11} , c_1 ; a_{21} , c_2 .

Sea, finalmente, $h > 1$.

Todo sistema normal, $S_h(m, n)$, cuya matriz ampliada es la $M_h(m, n)$, tiene, (21, I), el determinante δ_1 principal; es, por lo tanto, (4, VIII), compatible. Consideremos el correspondiente resolvente principal,

$R_h(\delta_1)$, relativo al determinante δ_1 . Puesto que este resolvente es, $(21, I)$, regular, los determinantes principales de $S_h(m, n)$, que tienen $h-1$ filas comunes con δ_1 , o sea los δ_i de las permanencias conjugadas de P_h^1 , de $C_h(m, n)$ pertenecen, $(21, V)$, a $R_h(\delta_1)$. Como una permanencia de orden h , tiene, $(22, I)$, a lo sumo, h permanencias conjugadas, en el resolvente $R_h(\delta_1)$ quedan prefijados, a lo sumo, los signos de h determinantes de orden h , δ_i , correspondientes a las permanencias dadas P_h^i , conjugadas de P_h^1 en $C_h(m, n)$. Prosiguiendo de este modo, con cada permanencia de la cadena, después de un número finito de operaciones las agotaremos todas. Ahora bien, para asegurar que efectivamente existen números a_{ij} , c_i que forman la matriz $M_h(m, n)$, basta observar que, en los determinantes Δ_h , [6.3], relativos a cada determinante δ , de una permanencia, en función del cual se expresan los demás determinantes de orden h de $M_h(m, n)$, solamente queda prefijado, a lo sumo, el signo de un elemento de cada columna. Por lo tanto, los demás pueden recibir signos arbitrarios. Del mismo modo resulta para los determinantes D_{h+1} , [6.6], de orden $h+1$, en los cuales queda prefijado, a lo sumo, el signo de un elemento de cada columna, excepto la última, la cual, por estar formada con los orlados del determinante principal, todos sus elementos tienen el mismo signo de aquél.

En resumen, existen valores de todos los elementos de Δ_h y de D_{h+1} , tales, que los demás determinantes de orden h y de orden $h+1$ de la matriz $M_h(m, n)$, puedan recibir signos arbitrarios. El teorema queda, pues, demostrado.

Nótese que no se afirma igual cosa con respecto a los valores numéricos de tales determinantes porque, en virtud de $(20, I)$, solo pueden ser arbitrariamente prefijados los de aquéllos que forman un mismo resolvente.

Se desprende inmediatamente que:

III) *A todo sistema $S_h(m, n)$ compatible regular, perteneciente a una matriz de tipo $T_h(m, n)$ y de característica h , corresponde una cadena, $C_h(m, n)$, de clase m , dimensión n y orden h de permanencias de esa matriz y recíprocamente, a toda cadena, $C_h(m, n)$, de permanencias de un $T_h(m, n)$, corresponden sistemas, $S_h(m, n)$, compatibles regulares que tienen ese dado tipo de matriz.*

Es claro que fijando valores a los determinantes de orden h y a los de orden $h+1$ que constituyen las permanencias de una cadena $C_h(m, n)$, de modo que estos valores satisfagan a las relaciones fundamentales, [6.3] y [6.6], del número (6) entre los determinantes de una misma matriz, obtendremos infinitos sistemas, $S_h(m, n)$, cuyas

matrices, $M_h(m, n)$, tienen la dada cadena de permanencias. Diremos que todos esos sistemas, $S_h(m, n)$, pertenecen a la cadena $C_h(m, n)$ dada. En particular:

IV) *Todos los sistemas, $S_h(m, n)$, iguales entre sí, es decir, que tienen la misma figura, pertenecen a una misma cadena de permanencias, puesto que todos ellos, (8), tienen un mismo resolvente principal. Pero no es necesariamente verdadera la proposición inversa. Es decir:*

V) *Existen sistemas, $S_h(m, n)$, pertenecientes a una misma cadena, $C_h(m, n)$, cualquiera que ella sea, que no tienen la misma figura convexa.*

En efecto; basta para ello, observar que se pueden asignar valores numéricos a los determinantes de orden h y a los de orden $h + 1$, de una misma cadena, de modo que se verifiquen las relaciones [6.3] y [6.6], pero no la (8, IV). Los diversos sistemas que así resultan, no teniendo ningún resolvente igual, no podrán, (8), ser iguales y, por lo tanto, tienen *figuras* distintas.

Ejemplo 1:

Sea $T_2(3, n)$, el tipo de una matriz ampliada de tres filas 1, 2, 3, de $n + 1$ columnas y de característica $h = 2$.

El conjunto de las tres permanencias siguientes:

$$\{12\} ; \{23\} ; \{31\};$$

de segundo orden, constituye, como es inmediato reconocerlo, una cadena binaria de permanencias de toda matriz ampliada $M_2(3, n)$ del dado tipo. Sea esta cadena

$$C_2(3, n) = \{12\} \{23\} \{31\}.$$

Es fácil verificar que los dos sistemas cuyos adjuntos son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = X_1 \\ y = X_2 \\ -x - y + 1 = X_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 1 = X_1 \\ y = X_2 \\ -x - y + 1 = X_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

pertenecen a la dada cadena. Sus resolventes principales, relativos al determinante (12), son, respectivamente:

$$X_3 + X_2 + X_1 = 1 \quad ; \quad 2X_3 + 3X_2 + X_1 = 3.$$

No son iguales, (8, II), puesto que tienen distintos resolventes. Por lo tanto, (8), no tienen la misma figura convexa.

Puesto que es, en este ejemplo, $n = 2$, ambos sistemas, tienen en el E_2 euclídeo, figura triangular acotada, (12, I).

Ejemplo 2:

Puede verificar fácilmente el lector que el conjunto de permanencias de toda $M_3(6, n)$ ampliada, de tipo $T_3(6, n)$, dado por el cuadro siguiente:

123 ε	126 ε'	134 ε	145 ε	156 ε	234 ε'	245 ε'	256 ε'
1234	1263	1342	1452	1562	2341	2451	2561
1235	1264	1345	1453	1563	2345	2453	2563
1236	1265	1346	1456	1564	2346	2456	2564

constituye la cadena

$$C_3(6, n) = \{123\} \{126\} \{134\} \{145\} \{156\} \{234\} \{245\} \{256\}.$$

Las filas de todas las $M_3(6, n)$ correspondientes a $T_3(6, n)$ han sido designadas, como de costumbre, con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Siendo $\varepsilon = \pm 1$ y $\varepsilon' = -\varepsilon$.

En el espacio puntual euclídeo, E_3 , todo $S_3(6, 3)$ perteneciente a dicha cadena, define un *exaedro* formado por dos triángulos, dos cuadriláteros y dos pentágonos. Las caras triangulares corresponden a las filas 3 y 6; las cuadriláteros, a las 4 y 5 y las pentagonales, a las filas 1 y 2.

Ejemplo 3:

Las diez permanencias de toda $M_5(7, n)$ ampliada de tipo $T_5(7, n)$ que, para $n = 5$, están representadas por los vértices de la segunda figura del número 20, constituyen la cadena:

$$C_5(7, n) = \{12345\} \{12347\} \{12356\} \{12367\} \{12456\} \{12467\} \{13456\} \{13467\} \{23456\} \{23467\}.$$

25. Cadenas cerradas y cadenas abiertas. Una cadena $C_h(m, n)$, no idéntica, se llama *cerrada*, si con cada una de sus permanencias P_h^i , figuran en la cadena todas las permanencias conjugadas de P_h^i . En caso contrario, se dirá que la cadena es *abierta*.

Las cadenas de los tres ejemplos del número precedente son cerradas, en cambio la cadena

$$C_3(5, n) = \{123\} \{125\} \{134\} \{235\}$$

que, en el ejemplo 1 del número (20), para $n = 3$, representa, en el E_3 euclídeo, una región pentaédrica no acotada, es abierta. Pues en esa cadena no figuran todas las permanencias conjugadas de la $\{125\}$.

Las relaciones entre estos tipos de cadenas y los sistemas que les pertenecen, resultan de los teoremas siguientes:

I) *A toda cadena cerrada pertenecen sistemas regulares finitos y, recíprocamente, a todo sistema regular finito, corresponde una cadena cerrada.*

En efecto, por ser cerrada, la cadena contiene, con cada permanencia, todas sus conjugadas. Todo sistema perteneciente a ella es, (24, III), regular. Si δ es el determinante de una cualquiera de las permanencias $P_h(\delta)$ de la cadena, en el correspondiente resolvente principal, (21, I), $R_h(\delta)$, por ser regular, todos los sistemas subordinados de orden $h-1$, relativos a las filas de δ , es decir, pertenecientes a $R_h(\delta)$, son, (10, III), compatibles y también finitos, (14, II), por ser sistemas unitarios con dos determinantes principales, el δ , (10, II), y el relativo a cada una de las permanencias conjugadas de $P_h(\delta)$. Por lo tanto, (17, II), el sistema es finito. Recíprocamente; si un sistema, $S_h(m, n)$, es regular y finito, en uno cualquiera de sus resolventes principales, $R_h(\delta)$, necesariamente propio, (12, II), por ser, además regular, (7), a cada determinante δ , (17, X), corresponden h que tienen $h-1$ filas comunes con él. La correspondiente cadena, es pues, cerrada, porque a cada uno de éstos, corresponde una permanencia de ella, (21, I) y (22, I).

OBS.: La finitud de un sistema, $S_h(m, n)$, correspondiente a una cadena cerrada, $C_h(m, n)$, no debe ser confundida con la acotación de la correspondiente región que define. Ella podrá resultar acotada o no según sea, respectivamente, (12, I), $n = h$, o bien $n > h$.

En particular:

II) *A toda sección completa de un sistema totalmente singular, $S_h(m, n)$ de característica h , ($h > 2$), corresponde una cadena cerrada de orden $h-1$ y de clase m , puesto que, (18, V), es un sistema regular finito.*

III) *A toda cadena abierta pertenecen sistemas regulares infinitos y, recíprocamente, a todo sistema regular infinito, corresponde una cadena abierta.*

Pues si a la cadena perteneciese algún sistema regular finito, con cada permanencia, (I), debieran figurar, en la cadena, todas sus conjugadas. Contra lo supuesto. Recíprocamente, a un sistema infinito no puede, (I), corresponder una cadena cerrada.

IV) *Si de una cadena no idéntica, $C_h(m, n)$, de clase $m > h$, se suprime una fila, resulta una nueva cadena de igual orden h y clase $m-1$. Siendo $m > h > 0$, la cadena consta, (24), de más de una permanencia; al suprimir en ella una fila quedan suprimidas todas las permanencias que la contienen. En todo sistema $S_h(m, n)$, (24, III),*

perteneiente a $C_h(m, n)$, queda también suprimida dicha fila; luego, (1, IV), tal sistema parcial es también compatible. La correspondiente cadena está formada por las permanencias restantes, (24, I), es pues de orden h y clase m .

V) Todas las cadenas abiertas de clase m y de orden h , de una misma matriz de tipo $T_h(m, n)$, pueden obtenerse de todas las cadenas cerradas de clase $m + 1$ y de orden h , de una misma matriz de tipo $T_h(m + 1, n)$, suprimiendo, en estas últimas cadenas, una sola fila.

En efecto, por su definición, (24), el número de cadenas de una matriz es finito. Luego, si de una cadena cerrada de clase $m + 1$ y de orden h , suprimimos una fila, quedarán suprimidas todas las permanencias de la cadena que tienen dicha fila. El conjunto restante formará, a su vez, (IV), una cadena, pero no cerrada, o sea una cadena abierta, por cuanto habrá, por lo menos, una permanencia, en ella, que no figurará con todas sus conjugadas, puesto que alguna permanencia de la cadena debe tener, por ser cerrada, una conjugada, al menos, entre las permanencias suprimidas.

Es claro que de una misma cadena de clase $m + 1$ y orden h , se deducirán $m + 1$ cadenas abiertas de clase m y orden h , suprimiendo, cada vez, una fila distinta.

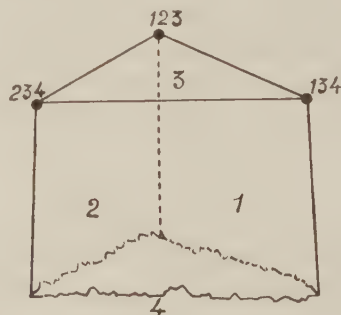
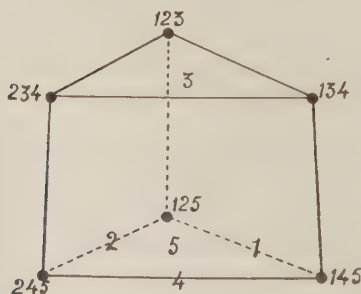
Esta propiedad, permite, pues, reducir el estudio de las cadenas a las cadenas cerradas solamente. Por lo tanto, el estudio de las figuras convexas abiertas, en el espacio euclídeo, E_h , queda así reducido, (20, II), al de las figuras convexas cerradas del espacio arguesiano E'_h .

Ejemplo:

Sea la cadena cerrada ternaria:

$$C_3(5, 3) = \{123\} \{125\} \{134\} \{145\} \{234\} \{245\},$$

que corresponde a la primera figura acotada adjunta de E_3 :



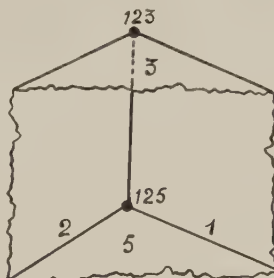
Suprimiendo en ella la fila 5, resulta la cadena abierta:

$$C_3(4, 3) = \{123\} \{134\} \{234\},$$

que corresponde a la segunda figura no acotada.

Suprimiendo, en cambio, en la misma cadena, la fila 4, se tiene:

$$C_3(4, 3) = \{123\} \{125\}:$$



que corresponde a esta última figura.

§ 8. - CÁLCULO DE CADENAS.

26. Formación de cadenas. — Veamos, ahora, cómo se obtienen todas las posibles cadenas de un dado tipo de matriz de característica $h > 0$ y de m filas. Es decir, todas las cadenas de orden h y de clase m .

En virtud de (25, IV), el problema queda limitado al de las cadenas cerradas. Por lo tanto, (25, I), es $m > h$. Nos ocuparemos, pues, solamente de este caso.

Designemos con números:

$$a_1, a_2, \dots, a_h, a_{h+1}, \dots, a_m, \quad [26.1]$$

las m filas de toda matriz de característica $h < m$. Los números h y m son los únicos datos. En cuanto a la dimensión, $n \geq h$, queda indeterminada.

A veces indicaremos con una variable natural i, j , etc., una cualquiera de dichas filas. Pues, es menester recordar que, en esta teoría, los elementos de la matriz son *indeterminados* y sus filas, *variables*. Según el modo de agruparse estas filas entre sí, para formar o no, permanencias resultan, en general, los distintos caracteres morfológicos de las correspondientes figuras poliédricas convexas.

En primer lugar, de (14, I) y (24, II) se deduce inmediatamente que:

I) *Todas las cadenas cerradas unitarias se obtienen fijando arbitrariamente, en cada matriz unitaria, ($h = 1$), dos determinantes principales.*

II) *Todas las permanencias de una matriz de tipo $T_h(h+1, n)$, $h > 0$, constituyen una cadena cerrada de orden h y de clase $h+1$; pues, (24, II), en ese tipo de matriz, todos los determinantes de orden h , son independientes entre sí, (6.4), y hay un solo orlado.*

Una cadena cerrada de orden $h > 0$ y de clase $h+1$, la llamaremos *cadena elemental de orden h* . Si $a_1, a_2, \dots, a_h, a_{h+1}$, son sus $h+1$ filas, se designará, cuando sea necesario ponerlas en evidencia, con la notación:

$$\{ \{ a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1} \} \}.$$

En particular:

III) *Toda cadena unitaria cerrada es una cadena elemental, puesto que siendo de orden $h=1$, su clase se reduce, (14, II), a $m=2$.*

IV) *Toda cadena elemental de orden h , tiene $h+1$ permanencias, puesto que es cerrada. Es decir, está formada por las $h+1$ permanencias de orden h , de toda matriz de tipo $T_h(h+1, n)$, $h > 0$.*

V) *Toda cadena de orden h y de clase $h+1$ que tiene $h+1$ permanencias, es una cadena elemental, $C_h(h+1, n)$, puesto que, en este caso, (25), con cada permanencia, figuran en la cadena todas sus conjugadas.*

Para formar, ahora, todas las cadenas cerradas de una dada clase m y dado orden, $h > 1$, correspondientes a toda matriz de tipo $T_h(m, n)$, siendo n cualquier número no menor que h , no necesariamente dado; designemos primeramente, sus m filas con m números, [26.I]; formemos, después, sus $\binom{m}{h}$ determinantes de orden h con dichas filas y orlemos cada uno de éstos con las $m-h > 0$ filas restantes. Dispongamos en una misma columna cada determinante y todos sus orlados. En el cuadro así formado prefijemos arbitrariamente una permanencia, $P_h(\delta)$, y sus h conjugadas. Partiendo de una cualquiera de éstas, prefijemos nuevamente, mientras sea posible, sus h conjugadas dentro de las independientes que quedan en el cuadro. Con un número finito de procesos de esta clase, resultará formada una cadena cerrada; y es claro que de este modo se obtendrán todas las posibles cadenas cerradas que admite el dado tipo de matriz.

El problema queda, así, reducido a una simple cuestión de carácter puramente combinatorio. Y es claro que las cadenas obtenidas no dependen del modo de enumerar las filas de la matriz dada, porque ello equivale solamente a un cambio de nombres.

Ejemplo 1:

Sea $T_h(6, n)$ el tipo dado de toda matriz $M_s(6, n)$, e indiquemos con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 sus 6 filas. Formemos los $\binom{6}{3} = 20$ determinantes de tercer orden y cada uno de sus orlados con las tres filas restantes como en el cuadro adjunto:

123ε	124ε'	125	126	134	135ε	136	145ε'	146	156	234	235	236ε'	245ε	246	256ε	345	346	356ε'	456
1234	1243	1253	1263	1342	1352	1362	1452	1462	1562	2341	2351	2361	2451	2461	2561	3451	3461	3561	4561
1235	1245	1254	1264	1345	1354	1364	1453	1463	1563	2345	2354	2364	2453	2463	2563	3452	3462	3562	4562
1236	1246	1256	1265	1346	1356	1365	1456	1465	1564	2346	2356	2365	2456	2465	2564	3456	3465	3564	4563

Se ha elegido, para empezar, la permanencia {123}, cuyas componentes son {12}, {23} y {31}. Entre las diversas conjugadas de {123}, hemos tomado las permanencias {124}, {135}, {236}. Partiendo, después, de la permanencia {124}, cuyas componentes son {12}, {24}, {41}, se pueden elegir solamente dos conjugadas, las de componentes {24} y {41}, pues, la otra está ya determinada. Se han tomado las {245} y {145}. Así siguiendo y, teniendo en cuenta que el grado de arbitrariedad, en la elección, va disminuyendo a medida que el número de permanencias elegidas aumenta, el *ciclo ternario* acaba por cerrarse. La cadena obtenida es la siguiente:

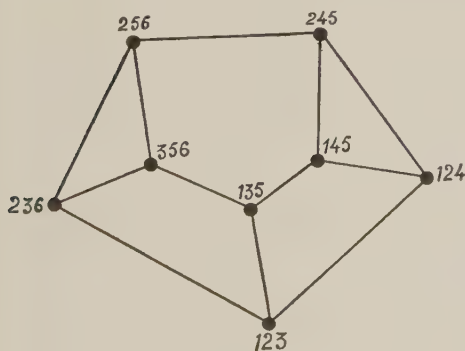
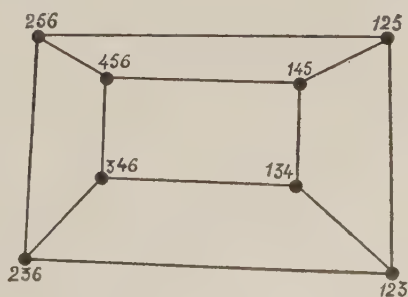
$$C_3(6, n) = \{123\} \{124\} \{135\} \{145\} \{236\} \{245\} \{256\} \{356\},$$

cuyas permanencias están designadas con caracteres gruesos en el cuadro.

Con ese proceso se ha obtenido, del mismo cuadro, esta otra cadena:

$$C'_3(6, n) = \{123\} \{125\} \{134\} \{145\} \{236\} \{256\} \{346\} \{456\}.$$

En el espacio puntual, E_3 euclídeo, corresponden respectivamente, al primero y segundo pentaedros convexos siguientes:


 $C_3(6, 3)$

 $C'_3(6, 3)$

(Continuará)

LA ORTOGONALIDAD SIN PONDERACION EL PROBLEMA DE HERMITE

POR

FERNANDO L. GASPAR

INSTITUTO DE ESTADÍSTICA — UNIVERSIDAD NAC. DEL LITORAL

RÉSUMÉ

Hermite s'était posé le problème de la détermination de polynômes de deux variables présentant, au point de vue algébrique, des propriétés généralissant celles des polynômes de Legendre (*).

Il définit deux familles de polynômes $V_{m,n}(x, y)$ et $U_{m,n}(x, y)$ (**) qui remplissent les conditions d'orthogonalité suivantes (à système)

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} V_{m,n}(x, y) \bar{V}_{r,s}(x, y) dx dy = 0 \quad m+n \neq r+s \\ \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} U_{m,n}(x, y) U_{r,s}(x, y) dx dy \neq 0 \quad m+n = r+s \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} V_{m,n}(x, y) U_{r,s}(x, y) dx dy = 0 \quad m, n \neq r, s \\ \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} V_{m,n}(x, y) U_{r,s}(x, y) dx dy \neq 0 \quad m, n = r, s \end{array} \right.$$

(*) P. Appell et J. Kampé de Fériet. — Fonctions hypergéométriques et hypersphériques — Polynômes d'Hermite, Paris, 1926, pag. 225.

« Hermite se proposait de déterminer des polynômes de deux variables présentant, au point de vue algébrique, des propriétés généralissant celles des polynômes de Legendre ».

(**) P. Appell et J. Kampé de Fériet. — Loc. cit. Introduction, pag. VI.

« Hermite a défini, dans des Notes parues aux Comptes Rendus de 1865, deux familles de polynômes à deux variables, qu'il désigne par $U_{m,n}(x, y)$ et $V_{m,n}(x, y)$ et qui, du point de vue algébrique, généralissent ceux de Legendre. Il a mis en évidence un fait nouveau et intéressant: quand on passe au cas de deux variables, la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre, ne s'étend pas à chacun des deux familles de polynômes $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, considérées séparément, mais bien à l'ensemble des deux qui sont ainsi adjointes l'une à l'autre. Les résultats d'Hermite ont été complétés de 1868 à 1870, par son élève F. Didon,

Dans le développement d'une fonction arbitraire $F(x, y)$ en série de polynômes $V_{m,n}(x, y)$ il mit

$$F(x, y) \sim \sum_{m=0} \sum_{n=0} A_{m,n} V_{m,n}(x, y)$$

et pour la propriété d'orthogonalité des $V_{m,n}(x, y)$ quand on applique la méthode de Fourier pour le calcul des coefficients $A_{m,n}$ on pose un système de $(m + n + 1)$ équations qui rend les calculs pratiquement irréalisables.

L'introduction des polynômes $U_{m,n}(x, y)$, adjoints des $V_{m,n}(x, y)$, évita l'inconvénient et il lui sembla que la propriété d'orthogonalité des dits polynômes (orthogonalité à système) était caractéristique pour les fonctions de plusieurs variables (*).

L'objet de notre travail est de déterminer une suite de polynômes $W_{m,n}(x, y)$ de telle nature que, pour tous les points d'un domaine D (nécessairement fini) on ait

$$\iint_D W_{m,n}(x, y) W_{r,s}(x, y) dx dy \begin{cases} = 0 & m, n \neq r, s \\ \neq 0 & m, n = r, s \end{cases}$$

condition qui permet d'effectuer le développement d'une fonction arbitraire en série de polynômes $W_{m,n}(x, y)$ et de calculer les coefficients de ce développement, exactement égal que dans le cas d'une variable, par la méthode que Fourier fit classique.

Malgré ce qui est exprimé par le grand analyste français, devant lequel nous nous inclinons avec un profond respect, nous prouvons que ces polynômes existent et que, quand on passe au cas de deux variables, la propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre subsiste.

L'application étant faite pour un domaine circulaire de rayon égal à l'unité, on obtient la suite des bilegendriennes, que nous designons par $L_{r,s}(x, y)$ et qui remplissent la condition d'orthogonalité des polynômes de Legendre.

On fait l'extension pour le cas de n variables.

qui en a notamment fait l'extension au cas de n variables » . . . (v. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1865, T. 60, pages. 370, 432, 461, 512).

(*) Ch. Hermite.—Sur quelques développements en série de fonctions de plusieurs variables. Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1865, T. 60 pag. 371. «La méthode si féconde et si connue, depuis Fourier, consistant à déterminer les coefficients par l'intégration après avoir multiplié la fonction par un facteur convenable, s'applique encore dans ces nouvelles circonstances, mais avec une modification qui semble caractéristique pour les fonctions de plusieurs variables ».

1. — En el caso de una variable, una sucesión de polinomios

$$B_0(x), B_1(x), B_2(x), \dots, B_n(x), \dots$$

definida en el intervalo (a, b) , se dice que cumple la condición de ortogonalidad, sin ponderación, si se verifica que

$$\int_a^b B_m(x) B_n(x) dx \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases} \quad [1]$$

en que es

$$B_n(x) = \gamma_{n/0} + \gamma_{n/1}x + \gamma_{n/2}x^2 + \dots + \gamma_{n/n}x^n \quad [2]$$

Estos polinomios, cumpliendo la condición de ortogonalidad (1), sólo existen en intervalos finitos.

Dado un intervalo finito, existe en él una, y sólo una familia, compuesta de infinitas sucesiones, discrepando en una constante multiplicativa, de polinomios que cumplen la condición de ortogonalidad [1].

Si una sucesión de polinomios satisface la condición de ortogonalidad [1], ella define un intervalo finito, en el cual la condición de ortogonalidad se cumple.

Surge, sin más, que los polinomios que satisfacen la condición de ortogonalidad [1] son, esencialmente, funciones del intervalo finito en el que esa condición de ortogonalidad debe cumplirse.

Dichos polinomios pueden ser, siempre, escritos bajo la forma de determinantes.

2. — Conviene destacar que, en vez, en el caso de una variable y de ortogonalidad ponderada, se dice que una sucesión de polinomios

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots$$

verifican dicha condición de ortogonalidad con una función polar o de ponderación $\varphi(x)$ si es

$$\int_a^b \varphi(x) P_m(x) P_n(x) dx \begin{cases} = 0 & m \neq n \\ \neq 0 & m = n \end{cases} \quad x \begin{cases} a \\ b \end{cases}$$

en que es $\varphi(x) > 0$ en todos los puntos del intervalo (a, b) .

Estos polinomios existen en intervalos que pueden ser finitos o infinitos, dependientes de la naturaleza del polo.

Dado un intervalo, finito o infinito, pueden existir, en él, infinitas familias, compuesta cada una de infinitas sucesiones, discrepando en una constante multiplicativa, de polinomios cumpliendo la condición de ortogonalidad ponderada.

Si una sucesión de polinomios cumple la condición de ortogonalidad ponderada, ella define un polo con el cual son ortogonales (*).

Dichos polinomios son, pues, esencialmente, funciones del polo.

3. — Imponiendo la condición de que, en la [2], sea

$$\gamma_{n/n} = 1 \quad [3]$$

los polinomios, cumpliendo la condición [1], definidos por determinantes, son de esta forma:

$$B_n(x) = \frac{(-1)^n}{\beta_n} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ d_0 & d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_{n+1} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ d_{n-1} & d_n & d_{n+1} & \dots & d_{2n-1} \end{vmatrix} \quad [4]$$

Siendo β_n el menor complementario de x^n , el coeficiente $\frac{(-1)^n}{\beta_n}$ asegura el cumplimiento de la condición [3].

La característica de ser estos polinomios, esencialmente, funciones del intervalo finito, en que la condición de ortogonalidad [1] debe cumplirse, queda destacada por la naturaleza de los elementos d_s del determinante, que los define siendo

$$d_s = \int_a^b x^s dx \quad (**) \quad [5]$$

(*) Carlos E. Dieulefait.—Contribution a l'étude de la théorie de la corrélation. Biometrika. Vol. XXVI. Parts. III y IV, Dic. 1934.

(**) En el campo discontinuo, llamando d_s' a los elementos del determinante, será:

$$d_s' = \sum_{i=1}^n x_i^s$$

que resultan, así, un caso particular de los elementos $\sigma_{k,j}$, definidos por Gram, en su estudio sobre el método de Tschebycheff, de la siguiente manera:

$$\sigma_{k,j} = \sum_{i=1}^n F_k(x_i) F_j(x_i)$$

Se demuestra que los β_n son siempre positivos y sus desarrollos permiten establecer una sucesión indefinida de desigualdades, que son las mismas que cumplen los momentos de una función de probabilidad.

En el campo discontinuo, en el caso de los $B_n(x)$, dichas desigualdades, constituyen una propiedad permanente de las sumas de las potencias de un conjunto finito, de números cualesquiera, del campo real.

4. — Se conocen en análisis los polinomios de Legendre definidos en el intervalo $(-1, +1)$, así

$$X_n(x) = \frac{1}{2, 4, 6 \dots 2n} \frac{d^{(n)}}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad [6]$$

Estos polinomios cumplen la condición de ortogonalidad [1] y si, como se ha dicho, dado un intervalo finito, existe en él una única familia de polinomios que satisfacen dicha condición, los $X_n(x)$ que define la [6] pertenecen a la sucesión de los $B_n(x)$ que define la [4] cuando el intervalo es $(-1, +1)$ o discrepan en una constante multiplicativa.

La determinación de la constante permite poner

$$X_n(x) = \frac{2^{n-1} + 1}{2} B_n(x)$$

con lo que la definición de los polinomios de Legendre, por determinantes, es inmediata.

5. — En el método derivativo para la generación de polinomios ortogonales con una función polar o de ponderación $\varphi(x)$, se trataba de encontrar un núcleo derivativo $F(k, x)$ tal que fuera

$$D^{(k)} \left\{ \varphi(x) F(k, x) \right\} = \varphi(x) P_k(x) \quad [7]$$

en que $P_k(x)$ era un polinomio en x , de grado k , ortogonal con $\varphi(x)$.

en que, cuando se pone

$$F_k(x) = x^{k-1}$$

se tiene que

$$\sigma_{k,j} = d'_{k+j-2}$$

(v. R. Risser. — Applications de la statistique a la demographie et a la biologie).

He determinado el carácter del polinomio de $F(k, x)$ y se lo ha definido (*) como el denominador de la derivada logarítmica de $\varphi(x)$ llevada a su forma irreductible.

En realidad, para las funciones del grupo hipergeométrico, cuando el intervalo es finito, el núcleo $F(k, x)$ está dado, directamente, por la k -ésima potencia de un trinomio de 2º grado, que designamos con $T_2(x)$, cuyas raíces son reales y definen los extremos del intervalo en que $\varphi(x)$ varía; es decir que, independientemente de $\varphi(x)$, sea cual fuere la función de ponderación, mientras el intervalo en que ella está definida sea el mismo, el núcleo derivativo $F(k, x)$ es el mismo.

Si fuera el (α, β) se tendría que:

$$T_2(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

con lo que

$$T_2(\alpha) = T_2(\beta) = 0$$

entonces

$$F(k, x) = T_2^k(x) = [(x - \alpha)(x - \beta)]^k$$

y la [7] toma esta forma

$$D^{(k)} \left\{ \varphi(x) T_2^k(x) \right\} = \varphi(x) P_k(x)$$

En el caso de no ponderación, en que el intervalo es necesariamente finito, si fuera el (a, b) , como se ha puesto para los $B_n(x)$, se tendrá que

$$T_2(x) = (x - a)(x - b)$$

es un polinomio de 2º grado en x cuyas raíces son reales y definen los extremos de dicho intervalo.

Al ser

$$T_2(a) = T_2(b) = 0$$

será

$$T_2^k(x) = [(x - a)(x - b)]^k$$

un polinomio en x grado de $2k$, cuya derivada k -ésima será un polinomio en x de grado k , que cumplirá la condición de ortogonalidad [1] como se prueba, fácilmente, por el método de integración por partes.

(*) Carlos E. Dieulefait. — Teoría de la Correlación. Nota II.

Se tendrá, pues, que la fórmula para generar por derivación, polinomios ortogonales sin ponderación, en un intervalo finito dado (a, b) , es la siguiente

$$D^{(n)} [(x - a)(x - b)]^n = G_n(x)$$

y como, en un dado intervalo finito, existe una única familia de polinomios que cumplen la condición de ortogonalidad sin ponderación, los $G_n(x)$ pertenecen a la sucesión de los $B_n(x)$, que define la [4], o discrepan en una constante multiplicativa, por lo que siempre será

$$G_n(x) \equiv C_n B_n(x) \quad (C_n = \text{constante})$$

Por una vía sencilla, propia y natural, puesto que toca los elementos conceptuales que están en la base de estas características funciones, se ha recaído (*) en la fórmula que permite generarlas por derivación y que se reduce a la de Olindo Rodrigues, que da nacimiento a los polinomios de Legendre, cuando el intervalo es $(-1, +1)$.

6. — Pasando al caso de dos variables, nos proponemos definir una sucesión de polinomios.

$$W_{0,0}(x, y), W_{1,0}(x, y), W_{0,1}(x, y), W_{2,0}(x, y), \dots; W_{r,s}(x, y), \dots$$

que, lo mismo que los $B_n(x)$, en el caso de una variable, para todos los puntos de un cierto dominio D , cumplan la condición de ortogonalidad

$$I_{r,s/m,n} = \iint_D W_{r,s}(x, y) W_{m,n}(x, y) dx dy \begin{cases} = 0 & r, s \neq m, n \\ \neq 0 & r, s = m, n \end{cases} \quad [8]$$

la que designamos con el nombre de ortogonalidad simple, sin ponderación, para distinguirla de la condición de ortogonalidad a sistema, sin ponderación, que cumplen los $V_{m,n}(x, y)$ y los $U_{m,n}(x, y)$ de Hermite, siendo

$$W_{m,n}(x, y) = \sum_{l=0}^{m+n} \sum_{j=0}^l \alpha_{m,n/l-j,j} x^{l-j} y^j \quad [9]$$

cuyo desarrollo termina en el término que contiene $x^m y^n$.

Escogemos como orden de formación de estos polinomios el de las potencias sucesivas del binomio $(x + y)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) de

(*) v. E. Goursat. — Cours d'Analyse. T. I. pag. 208. Polynomes de Legendre.

manera que la sucesión completa de ellos, estará dada por el desarrollo de

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^l W_{l-j,j}(x, y) \quad [10]$$

Dados, pues, dos polinomios de la sucesión, siempre será, en el orden de la misma, uno de rango mayor que el otro.

Imponiendo la condición de que sea

$$\alpha_{m,n/m,n} = 1 \quad [11]$$

definimos así un $W_{m,n}(x, y)$

$$W_{m,n}(x, y) = \frac{(-1)^{n+\sum_{v=1}^{m+n} v}}{\Delta_{m,n}} \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & \dots & x^{m+1} y^{n-1} & x^m y^n \\ \delta_{00} & \delta_{10} & \delta_{01} & \delta_{20} & \delta_{11} & \delta_{02} & \delta_{30} & \dots & \delta_{m+1,n-1} & \delta_{m,n} \\ \delta_{10} & \delta_{20} & \delta_{11} & \delta_{30} & \delta_{21} & \delta_{12} & \delta_{40} & \dots & \delta_{m+2,n-1} & \delta_{m+1,n} \\ \delta_{01} & \delta_{11} & \delta_{02} & \delta_{21} & \delta_{12} & \delta_{03} & \delta_{31} & \dots & \delta_{m+1,n} & \delta_{m,n+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \delta_{m+1,n-1} & \delta_{m+2,n-1} & \delta_{m+1,n} & \delta_{m+3,n-1} & \delta_{m+2,n} & \delta_{m+1,n+1} & \delta_{m+4,n-1} \dots \delta_{2(m+1), 2(n-1)} & \delta_{2m+1, 2n-1} \end{vmatrix} \quad [12]$$

en que al ser $\Delta_{m,n}$, el menor complementario de $x^m y^n$, el coeficiente

$\frac{(-1)^{n+\sum_{v=1}^{m+n} v}}{\Delta_{m,n}}$ asegura el cumplimiento de la condición [11].

Estos polinomios $W_{m,n}(x, y)$ verificando, en el caso de dos variables, la condición de ortogonalidad que expresa la [8], tienen las siguientes características:

Existen, únicamente, en dominios finitos.

Dado un dominio finito y un orden de formación, existe, en ese dominio y con esa ordenación, una y sólo una familia, compuesta de infinitas sucesiones, discrepando en una constante multiplicativa.

Si una sucesión de polinomios de dos variables, cumplen la condición de ortogonalidad, que expresa la [8], ella define un dominio finito, en el cual la condición de ortogonalidad se cumple.

Se ve, pues, que los polinomios $W_{m,n}(x, y)$ que define la [12] y cumplen la condición de ortogonalidad, que expresa la [8], son funciones de x , de y , del dominio y del orden de formación.

La condición de ortogonalidad que dichos polinomios deben cumplir y expresa la [8], hace que sea de la naturaleza de ellos, constituir sucesiones, necesariamente, asimétricas.

En la extensión de la ortogonalidad, al caso de dos variables, interviene, pues, un nuevo elemento: el orden de formación de la sucesión.

La característica de estos polinomios, de ser, como se ha dicho, esencialmente funciones del dominio finito, en que la condición de ortogonalidad [8] debe cumplirse, la destacan así los elementos $\delta_{r,s}$ del determinante que los genera, así definidos:

$$\delta_{r,s} = \iint_D x^r y^s dx dy \quad [13]$$

Para demostrar la condición de ortogonalidad que impone la [8] supongamos que sea $m, n \neq r, s$ y que, en el orden de la sucesión dado por la [10], sea $W_{r,s}(x, y)$ el de rango mayor. Escribimos en forma de determinante, según la [12], el de rango mayor; en forma de polinomio, según la [9], el de rango menor con lo que

$$I_{r,s/m,n} = \frac{(-1)^{s+\sum_{v=1}^{r+s} v} m+1}{\Delta_{r,s}} \sum_{l=0}^{m+1} \sum_{j=0}^n \alpha_{m,n/l-j,j} \iint_D \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^r y^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{l-j} y^j dx dy \\ \delta_{r+1,s-1} \delta_{r+2,s-1} \dots \delta_{2r-1,2s-1} \end{vmatrix}$$

Ejecutando la doble integración, se tendrá una suma de determinantes que, en virtud de la definición de los $\delta_{r,s}$ dada en la [13], tendrá, cada uno de ellos, la primer fila igual a algunas de las $s + \sum_{v=1}^{r+s} v$ filas siguientes, por lo que todos ellos serán nulos y la condición de ortogonalidad está probada.

En el caso de no anulamiento, procediendo en la misma forma, se tendrá que

$$\begin{aligned} I_{m+1,n-1/m+1,n-1} &= \iint_D W_{m+1,n-1}^2(x, y) dx dy = \\ &= \iint_D W_{m+1,n-1}(x, y) x^{m+1} y^{n-1} dx dy = \frac{\Delta_{m,n}}{\Delta_{m+1,n-1}} > 0 \end{aligned}$$

y se demuestra que todos los Δ son positivos.

7. — En el caso de ortogonalidad con ponderación (*) los polinomios $\lambda_{m,n}(x, y)$, ortogonales con la función de Bravais, $B(x, y)$, podían ser descompuestos en el producto de dos polinomios de la sucesión de tal manera que era

$$\lambda_{m,n}(x, y) = \lambda_{m,0}(x, y) \lambda_{0,n}(x, y)$$

descomposición que refleja la naturaleza de la función de probabilidad con la cual los $\lambda_{m,n}$ son ortogonales. Dos casos se presentaban, dependientes de la naturaleza de la función de ponderación:

a) Si la función de ponderación $F(x, y)$ era de dos variables en independencia de probabilidad, se tenía que

$$F(x, y) = \varphi(x) \rho(y)$$

y la descomposición de los $\lambda_{m,n}$ se reducía a un producto de dos polinomios uno solo en x , y otro solo en y , dependientes de la $\varphi(x)$ y de la $\rho(y)$ respectivamente.

b) Si las dos variables, de la función de ponderación, estaban en relación estocástica, como en el caso de la bravesiana, era

$$B(x, y) = \varphi(x) B_x(y)$$

en que $\varphi(x)$, función sólo de la x , era la función en independencia, y $B_x(y)$, función de x y de y , era la ligada. Así mirada la función de Bravais, que está definida en un dominio infinito, la descomposición de los $\lambda_{m,n}(x, y)$ ortogonales con ella, estaba dada por el producto de un $\lambda_{m,0}(x, y)$, que es un polinomio solo en x , de grado m , dependiente de la $\varphi(x)$, por un $\lambda_{0,n}(x, y)$ que es un polinomio en xy de grado n en x y n en y , dependiente de la función ligada $B_x(y)$ y ambos pertenecientes a la sucesión de los $\lambda_{m,n}(x, y)$ como se dijo.

Al pasar a la ortogonalidad sin ponderación, en el caso de dos variables, en forma paralela, dos casos se presentan dependientes ahora, exclusivamente, de la naturaleza del dominio finito en que la condición de ortogonalidad debe cumplirse.

a) Si el dominio es tal que al variar una de las variables, el intervalo en que la otra queda definida no varía, cual sería un dominio rectangular, se verifica que

$$W_{m,n}(x, y) = W_{m,0}(x, y) W_{0,n}(x, y)$$

(*) Fernando L. Gaspar. — Sobre la ortogonalidad a dos variables y generalización de la superficie de Bravais. Anales de la Sociedad Científica Argentina. T. CXXI, Febrero de 1936.

en que $W_{m,0}(x,y)$ es un polinomio sólo en x de grado m y $W_{0,n}(x,y)$ es un polinomio sólo en y de grado n , ortogonales en los intervalos donde, respectivamente, la x y la y varían.

b) Si el dominio fuera tal que al variar una de las variables variase el intervalo en que la otra queda definida, cuyos casos más sencillos estarían dados por dominios circulares o elípticos, teniendo en cuenta el orden de formación que define [10], se verificará que

$$W_{m,n}(x,y) = X_{m(n)}(x) W_{0,n}(x,y)$$

en que $X_{m(n)}(x)$ es un polinomio sólo en x , de grado m , no perteneciente a la sucesión de los $W_{m,n}$ pero ortogonal, en el intervalo en que la x está definida, con una función de ponderación determinada por el grado de n y por las funciones de x que definen los extremos del intervalo en que y varía, cuando x varía. $W_{0,n}(x,y)$ es un polinomio en xy de grado complejo n perteneciente a la sucesión de los $W_{m,n}(x,y)$.

8. — Después de lo expresado, es inmediata la solución del problema que Hermite se había planteado: determinar los polinomios de dos variables que presentasen propiedades generalizando las de los de Legendre, es decir que, simbolizando a dichos polinomios con $L_{r,s}(x,y)$, para todos los puntos de un dominio circular de radio igual a la unidad, se verificase:

$$\iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} L_{r,s}(x,y) L_{m,n}(x,y) dx dy \begin{cases} = 0 & r, s \neq m, n \\ \neq 0 & r, s = m, n \end{cases} \quad [14]$$

Para aplicar la [12], los elementos del determinante que define la [13] serán, en este caso:

$$\delta_{r,s} = \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} x^r y^s dx dy$$

Por la naturaleza del dominio, cuando cualquiera de los dos sub-índices es impar, la integral es nula. Se tiene, pues:

$$\delta_{2r+1,2s} = 0$$

$$\delta_{2r,2s+1} = 0$$

$$\delta_{2r+1,2s+1} = 0$$

$$\delta_{2r,2s} = \sum_{v=0}^{2r} (-1)^v \binom{2r}{v} \frac{2^{2s+3+(2r-v)}}{2s+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2s+1}{2} + 1 + (2r-v)\right) \Gamma\left(\frac{2s+1}{2} + 1\right)}{\Gamma(2s+3+(2r-v))}$$

Es inmediato que $\delta_{0,0}$ mide el área del dominio, y por la naturaleza de estos polinomios, esencialmente funciones del dominio, cualquier $\delta_{2r,2s}$ estará dado en función de $\delta_{0,0}$.

Se verificará también que los $\delta_{2r,2s}$ constituyen una sucesión simétrica, es decir que

$$\delta_{2r,2s} = \delta_{2s,2r}$$

Efectuando el cálculo se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_{0,0} &= [2 \Gamma(1,5)]^2 \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{2,0} \\ \delta_{0,2} \end{array} \right\} &= \frac{1}{4} \delta_{0,0} \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{4,0} \\ \delta_{0,4} \end{array} \right\} &= \frac{1}{8} \delta_{0,0} \\ \delta_{2,2} &= \frac{1}{24} \delta_{0,0} \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{6,0} \\ \delta_{0,6} \end{array} \right\} &= \frac{5}{64} \delta_{0,0} \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{4,2} \\ \delta_{2,4} \end{array} \right\} &= \frac{1}{64} \delta_{0,0} \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{8,0} \\ \delta_{0,8} \end{array} \right\} &= \frac{7}{128} \delta_{0,0} \\ \left. \begin{array}{l} \delta_{6,2} \\ \delta_{2,6} \end{array} \right\} &= \frac{1}{128} \delta_{0,0} \\ \delta_{4,4} &= \frac{3}{640} \delta_{0,0} \end{aligned}$$

que son los elementos necesarios para la generación de los $L_{r,s}(x, y)$ hasta los de grado complejo 4°.

El cálculo de $\delta_{0,0}$ extendido al de un círculo cualquiera, de radio r , permite expresar el área del círculo en función de la integral eulérica de segunda especie, y así se tiene que, si llamamos A al área, es:

$$A = [2 r \Gamma(1,5)]^2$$

Análogamente, si se trata de una elipse es:

$$A = a b [2 \Gamma(1,5)]^2$$

en que a y b son los semi-ejes, mayor y menor, de la elipse; esta última fórmula se reduce a la anterior cuando es:

$$a = b = r$$

Aplicando la [13] se tiene la sucesión de los bilegendrianos, hasta los de 4° grado inclusive, que cumplen la condición [14]; conviniendo en poner $L_{0,0}(x, y) = 1$, es:

$$L_{0,0}(x, y) = 1$$

$$L_{1,0}(x, y) = x$$

$$L_{0,1}(x, y) = y$$

$$L_{2,0}(x, y) = -\frac{1}{4} + x^2$$

$$L_{1,1}(x, y) = xy$$

$$L_{0,2}(x, y) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^2 + y^2$$

$$L_{3,0}(x, y) = -\frac{1}{2}x + x^3$$

$$L_{2,1}(x, y) = -\frac{1}{6}y + x^2y$$

$$L_{1,2}(x, y) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3 + xy^2$$

$$L_{0,3}(x, y) = -\frac{3}{5}y + \frac{3}{5}x^2y + y^3$$

$$L_{4,0}(x, y) = \frac{1}{16} - \frac{3}{4}x^2 + x^4$$

$$L_{3,1}(x, y) = -\frac{3}{8}xy + x^3y$$

$$L_{2,2}(x, y) = \frac{1}{24} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{3}x^4 + x^2y^2$$

$$L_{1,3}(x, y) = -\frac{3}{5}xy + \frac{3}{5}x^3y + xy^3$$

$$L_{0,4}(x, y) = \frac{3}{35} - \frac{6}{35}x^2 - \frac{6}{7}y^2 + \frac{3}{35}x^4 + \frac{6}{7}x^2y^2 + y^4$$

Poniendo:

$$X_{1(i)}(x) = x \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$X_{2(0)}(x) = -\frac{1}{4} + x^2$$

$$X_{2(1)}(x) = -\frac{1}{6} + x^2$$

$$X_{2(2)}(x) = -\frac{1}{8} + x^2$$

$$X_{3(0)}(x) = -\frac{1}{2}x + x^3$$

$$X_{3(1)}(x) = -\frac{3}{8}x + x^3$$

$$X_{4(0)}(x) = \frac{1}{16} - \frac{3}{4}x^2 + x^4$$

Se tiene que

$$L_{1,0}(x, y) \equiv X_{1(0)}(x)$$

$$L_{2,0}(x, y) \equiv X_{2(0)}(x)$$

$$L_{1,1}(x, y) \equiv X_{1(1)}(x) L_{0,1}(x, y)$$

$$L_{3,0}(x, y) \equiv X_{3(0)}(x)$$

$$L_{2,1}(x, y) \equiv X_{2(1)}(x) L_{0,1}(x, y)$$

$$L_{1,2}(x, y) \equiv X_{1(2)}(x) L_{0,2}(x, y)$$

$$L_{4,0}(x, y) \equiv X_{4(0)}(x)$$

$$L_{3,1}(x, y) \equiv X_{3(1)}(x) L_{0,1}(x, y)$$

$$L_{2,2}(x, y) \equiv X_{2(2)}(x) L_{0,2}(x, y)$$

$$L_{1,3}(x, y) \equiv X_{1(3)}(x) L_{0,3}(x, y)$$

y en general

$$L_{r,s}(x, y) \equiv X_{r(s)}(x) L_{0,s}(x, y) \quad [15]$$

en que $X_{r(s)}(x)$ es un polinomio sólo en x , de grado r , no perteneciente a la sucesión de los $L_{r,s}(x, y)$ pero ortogonal en el intervalo $(-1, +1)$ con una función de ponderación $\varphi_s(x)$ determinada por el grado de s y por el intervalo funcional en que y varía, cuando x varía, así definida:

$$\varphi_s(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2} + s} \quad x \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad [16]$$

Es decir que

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_s(x) \times_{r(s)}(x) \times_{v(s)}(x) dx \begin{cases} = 0 & r \neq v \\ \neq 0 & r = v \end{cases}$$

Variando s se obtiene una infinitud de familias, compuesta cada una, a su vez, de infinitas sucesiones discrepando en una constante multiplicativa, de polinomios ortogonales en el intervalo $(-1, +1)$.

Con $s = -1$ y con $s = 0$ se obtienen los de Tschebycheff; con $s = -\frac{1}{2}$ los de Legendre (*).

Los $X_{r(s)}(x)$ forman un subgrupo de familias de polinomios de Jacobi (hipergeométricos) ortogonales en el intervalo $(-1, +1)$.

9. — La descomposición de los $L_{r,s}(x, y)$ que acusa la [15] va a permitir simplificar su generación por determinantes.

Llamando $\mu_{n(s)}$ a un momento de orden n ($n = 0, 1, 2, \dots$) de $\varphi_s(x)$ es

$$\mu_{n(s)} = \int_{-1}^{+1} \varphi_s(x) x^n dx$$

y se verifica que es

$$\mu_{n(s)} = \delta_{n, 2s}$$

nulo, cuando n es impar, es decir que

$$\mu_{2n+1(s)} = 0$$

$$\mu_{2n(s)} = \delta_{2n, 2s}$$

cuyos valores ya se han calculado.

Por otra parte, poniendo

$$\delta_n(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} y^n dy \quad [17]$$

se verifica que la integral es nula cuando n es impar

Entonces es

$$\delta_{2n+1}(x) = 0$$

$$\delta_{2n}(x) = \frac{2}{2n+1} (1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}$$

(*) v. R. Courant und D. Hilbert. — Methoden der Mathematischen Physik. T. I. Pag. 75.

Se tiene que

$$X_{r(s)}(x) = \frac{(-1)^r}{\beta_{r(s)}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^r \\ \mu_{0(s)} & \mu_{1(s)} & \mu_{2(s)} & \dots & \mu_{r(s)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{r-1(s)} & \mu_{r(s)} & \mu_{r+1(s)} & \dots & \mu_{2r-1(s)} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^r}{\beta_{r(s)}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^r \\ \delta_{0,2s} & \delta_{1,2s} & \delta_{2,2s} & \dots & \delta_{r,2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{r-1,2s} & \delta_{r,2s} & \delta_{r+1,2s} & \dots & \delta_{2r-1,2s} \end{vmatrix}$$

$$L_{0,s}(x, y) = \frac{(-1)^s}{\beta_{0s}} \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 & \dots & y^s \\ \delta_0(x) & \delta_1(x) & \delta_2(x) & \dots & \delta_s(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{s-1}(x) & \delta_s(x) & \delta_{s+1}(x) & \dots & \delta_{2s-1}(x) \end{vmatrix}$$

y por lo tanto $L_{r,s}(x, y)$ queda definido por el determinante producto, es decir que

$$L_{r,s}(x, y) = \frac{(-1)^{r+s}}{\beta_{r(s)} \beta_{0s}} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^r \\ \delta_{0,2s} & \delta_{1,2s} & \delta_{2,2s} & \dots & \delta_{r,2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{r-1,2s} & \delta_{r,2s} & \delta_{r+1,2s} & \dots & \delta_{2r-1,2s} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 & \dots & y^s \\ \delta_0(x) & \delta_1(x) & \delta_2(x) & \dots & \delta_s(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{s-1}(x) & \delta_s(x) & \delta_{s+1}(x) & \dots & \delta_{2s-1}(x) \end{vmatrix}$$

10. — El cálculo por determinantes, aún con esta última simplificación, siempre es largo y engorroso, lo que hace doblemente interesante la determinación del método derivativo que permita generar los $L_{r,s}(x, y)$ por derivación.

La descomposición que indica la [15]; la naturaleza de $X_{r(s)}(x)$ y de $L_{0s}(x, y)$ como se han definido, hace que tratando a los $X_{r(s)}(x)$ como polinomios ortogonales con la función de ponderación que define la [16] y a los $L_{0s}(x, y)$ como polinomios ortogonales sin ponderación, en el intervalo funcional que define los extremos de la integral de la [17], se determinen los respectivos núcleos derivativos con lo que

$$F(k, x) = (1 - x^2)^k \quad (\text{para cualquier } \varphi_s(x); \text{ es decir para } s \text{ cualquiera})$$

$$F(k, xy) = (y^2 - 1 + x^2)^k$$

En menos de una constante multiplicativa se tendrá que

$$L_{r,s}(x,y) = C \cdot \frac{\frac{d^{(r)}}{dx^r} (1-x^2)^{\frac{2(r+s)+1}{2}} \frac{\delta^{(s)}}{\delta y^s} (y^2-1+x^2)^s}{(1-x^2)^{\frac{2s+1}{2}}} C = \text{const.}$$

Finalmente, la determinación de la constante permite poner:

$$L_{r,s}(x,y) = (-1)^r \cdot \frac{1}{(2r+2s+1)^{(r)}(2s-1)!!} \cdot \frac{\frac{d^{(r)}}{dx^r} (1-x^2)^{\frac{2(r+s)+1}{2}} \frac{\delta^{(s)}}{\delta y^s} (y^2-1+x^2)^s}{(1-x^2)^{\frac{2s+1}{2}}}$$

en que es

$$(v)^{(r)} = v(v-1)(v-2) \dots (v-r+1)$$

$$(2s-1)!! = 1, 3, 5 \dots (2s-1) [(2s-1) \text{ semi-factorial}]$$

11. — El desarrollo de una función $F(x, y)$ en serie de bilegendria-nos dará:

$$F(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=0}^r \omega_{r-n,n} L_{r-n,n}(x, y)$$

en que, por la propiedad de ortogonalidad de los $L_{r,s}(x, y)$ el cálculo de los coeficientes $\omega_{m,n}$ es inmediato, por el método de Fourier, y así se tiene que es:

$$\omega_{m,n} = \frac{\iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} F(x, y) L_{m,n}(x, y) dx dy}{\iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} L_{m,n}^2(x, y) dx dy} \quad [18]$$

Los coeficientes así calculados satisfacen la condición de los mínimos cuadrados.

En efecto: dentro de una aproximación complexiva de grado s , se tendrá que

$$F(x, y) \sim \sum_{r=0}^s \sum_{n=0}^r \omega_{r-n,n} L_{r-n,n}(x, y)$$

y, una medida de la aproximación cuadrática, función de los coeficientes $\omega_{m,n}$ estará así dada

$$\sigma(\omega_{m,n}) = \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} \left[F(x, y) - \sum_{r=0}^s \sum_{n=0}^r \omega_{r-n,n} L_{r-n,n}(x, y) \right]^2 dx dy$$

y para que la condición de mínimo se cumpla deberá ser

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \omega_{m,n}} = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots, s \\ n = 0, 1, 2, \dots, s \end{pmatrix}$$

Ejecutando la derivación se tiene que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \omega_{m,n}} = \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} \left[F(x, y) - \sum_{r=0}^s \sum_{n=0}^r \omega_{r-n,n} L_{r-n,n}(x, y) \right] L_{m,n}(x, y) dx dy = 0$$

Separando las integrales y por la propiedad de ortogonalidad de los $L_{r,s}(x, y)$ se tiene que

$$\iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} F(x, y) L_{m,n}(x, y) dx dy = \omega_{m,n} \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} L_{m,n}^2(x, y) dx dy$$

de donde la [18].

El cálculo de dichos coeficientes se simplifica normalizando la sucesión de los $L_{r,s}(x, y)$ con lo que, llamando $\bar{L}_{r,s}(x, y)$ a la sucesión normalizada, es:

$$\bar{L}_{m+1,n-1}(x, y) = \sqrt{\frac{\Delta_{m+1,n-1}}{\Delta_{m,n}}} L_{m+1,n-1}(x, y)$$

y entonces

$$\omega_{m,n} = \iint_{(1-x^2-y^2 \geq 0)} F(x, y) \bar{L}_{m,n}(x, y) dx dy$$

12. — La extensión al caso de n variables es inmediata: si las variables fueran $x, y, \dots, z$, adoptado como orden de formación el de las potencias sucesivas del polinomio $(x + y + \dots + z)$ los elementos del determinante que genera los $L(x, y, \dots, z)$ se definen así:

$$\delta_{r,s} \dots v = \int \int \dots \int_{(1-x^2-y^2-\dots-z^2 \geq 0)} x^r y^s \dots z^v dx dy \dots dz$$

y la construcción del determinante es similar a la del [12].

LA PRESENCIA DEL GLUTATIONE EN EL GERMEN DEL TRIGO Y SU INFLUENCIA EN LAS HARINAS

POR EL DR. E ING. AGR. C. M. ALBIZZATI

Los trabajos de Holger Jorgensen (1935-1936), relacionados al estudio de $\text{Br.O}_3\text{K}$ como inhibidor de las enzimas proteolíticas contenidas en la harina de trigo, como asimismo la acción activadora del Glutathione sobre dichas enzimas, me indujeron a efectuar una serie de ensayos, a fin de comprobar la presencia de este último en el germen de trigo.

Es bien conocida, por quienes se dedican a estudio de la química cerealera, la acción perjudicial del germen en la calidad panificable de las harinas, atribuyendo esta acción a la presencia de proteasas, las cuales modificar las cualidades físicas de los amasijos, haciendo perder al gluten su elasticidad y extensibilidad.

De la copiosa bibliografía que existe al respecto, cábeme citar aquí el interesante trabajo de los autores americanos B. Sullivan, Cleo Near y Guy Foley (1936), quienes demuestran en él, una vez más, los efectos agravantes del germen sobre las harinas durante los procesos de panificación.

Ellos al estudiar en particular sus componentes, los que ya habían sido aislados por diferentes investigadores, a saber, la Rafinosa ($\text{C}_{18}\text{H}_{32}\text{O}_{16}$) por Richardson y Crampton (1886), y últimamente, por Colin y Belwal (1934) los que estudiaron también la Sacarosa ($\text{C}_{12}\text{H}_{22}\text{O}_{11}$); la Alantoina ($\text{C}_4\text{H}_6\text{O}_3\text{N}_4$) por Richardson y Crampton (1886); la Betaina ($\text{C}_5\text{H}_{11}\text{O}_2\text{N}$) y la Colina ($\text{C}_5\text{H}_{15}\text{O}_2\text{N}$) aislados por Schulze y Frankfurt (1893); el ácido Nucleico, por Thomas y Dack (1925); la Fitina, por Andrews y Bayley, además de los cuerpos nombrados, estudian la Asparagina ($\text{C}_4\text{H}_8\text{O}_3\text{N}_2$), la Arginina ($\text{C}_6\text{H}_{14}\text{O}_2\text{N}_2$); y la Creatina ($\text{C}_4\text{H}_9\text{N}_3\text{O}_2$) llegando a las siguientes conclusiones:

Que el germen de trigo, así como su extracción acuosa perjudican la harina desmejorando visiblemente sus cualidades panificable, aún

después de ser llevado a ebullición, no pudiendo atribuírsele en tal caso una acción proteolítica sobre el gluten, y que tampoco esta acción es debida a las diferentes sustancias aisladas del germen, como la Rafinosa, Sacarosa, Alantoina, Colina, Betaina, Asparagina, Arginina, etc., lo que se comprueba con los farinogramas por ellos obtenidos en esa ocasión.

Dado que la extracción acuosa del germen, mantiene sus propiedades, aún después de la ebullición, según Sullivan, Near y Foley, y estando estos resultados en concordancia con lo que había observado Jorgensen, con extracciones acuosas de levaduras de cerveza llevadas a ebullición; es que se justifica de una manera incontrovertible, que la desintegración del gluten no debe atribuírse únicamente a las proteasas, pero sí a una sustancia que actúa como activadora, de acuerdo a lo observado por Jorgensen con el Glutathione, cuando es incorporado directamente a un amasijo de harina y agua.

Inicié mis ensayos a mediados del mes de Agosto de 1936, comenzando por estudiar la composición química del germen de trigo, el que me había sido suministrado por unos de los principales molinos de la Capital. Los métodos analíticos aplicados son los indicados por la A. O. A. Ch. y Cereal Chemistry.

Los datos obtenidos, fueron los que a continuación detallo:

Humedad	11,83 %
Cenizas	5,09 »
Proteína N 6,25	31,39 »
Materia grasa	12,92 »
Substancias no determinadas	38,77 »

Conocida así, la composición química del germen que iba a utilizar en los ensayos, pasé a comprobar la presencia de Glutathione, para esto realicé una suspensión de germen en agua, lo filtré, sometiendo luego el filtrado a ebullición durante unos minutos, y caracterizando cualitativamente el Glutathione por la coloración rojoviolácea que produce con el Nitroprusiato de Sodio en medio amoniacal.

Tal sustancia fué descubierta y extraída de la levadura de cerveza, por Hopkins (1921), variando su cantidad entre 0,10 y 0,23 gr. por %. Está formado por la Glicocola, ácido Glutámico y Cisteína, siendo por lo tanto un tripéptido con la siguiente fórmula: $C_{10}H_{17}N_3SO_6$, es fácilmente soluble en agua, y encuéntrase difun-

cida entre los seres vivientes, vegetales y animales, desempeñando en ambos casos un papel esencial en la respiración de los tejidos.

En este sentido, actúa como aceptor de Hidrógeno reduciéndose, a la vez que oxida las substancias celulares; una vez reducido fija Oxígeno, y por ser auto-oxidable vuelve a su estado inicial.

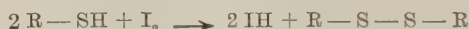
Este mecanismo puede representarse así:



o bien



Determinada pues, su presencia en el germen, se procedió a hacer su evaluación utilizando para ello el método propuesto por Tunnicliffe (1925) basado en la siguiente reacción:



Empleando una solución de iodo, 0,01 N y como indicador externo el Nitroprusiato de sodio en medio amoniacal.

La cantidad de Glutatione encontrada en el germen de trigo, fué de 0,345 gr. por ciento.

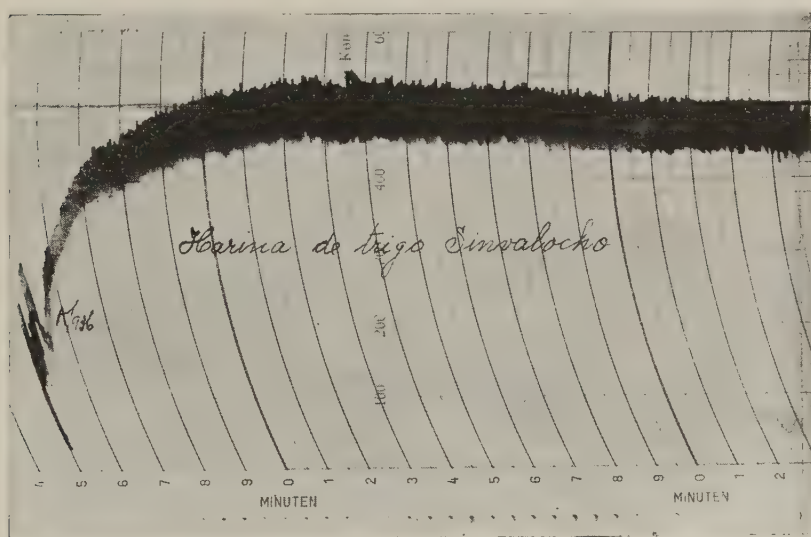
La harina utilizada para los ensayos fué obtenida de la molinera de trigo de la variedad «Sinvaloch», en molino experimental, de acuerdo a las normas establecidas. La extracción correspondió a un 60 % y sus datos analíticos, después del reposo necesario antes de ser utilizado, fueron:

Humedad	11,56 %
Cenizas	0,53 »
Proteína N 5,7	11,56 »
Absorción de H ₂ O	68,00 »
Actividad proteolítica	0,39 »

La curva farinográfica obtenida, cuya reproducción se acompaña a continuación, caracteriza a una harina de largo tiempo de desarrollo, y de excelente estabilidad. (Fot. N° 1).

Conocida la absorción de agua, y su farinograma, procedí a efectuar el ensayo ya practicado por Jorgensen, para lo cual se hicieron

dos amasijos con 50 gr. de harina y 34 cc. de agua, pero agregando a uno de ellos 45 mg. de Glutathione puro. Efectuado el amasado correspondiente, el que se hizo de tal manera que ambos amasijos quedaran terminados al mismo tiempo, se los llevó a la estufa calentada a 30°C durante 30' y cuando al cabo de este tiempo se los retiró, observóse que el amasijo con Glutathione había perdido tenacidad, deformándose la pasta con respecto al testigo.



Fotografía nº 1

Como dato ilustrativo, inserto a continuación la *fotografía nº 2*.

Conociendo entonces, la riqueza de Glutathione en el germen de trigo, procedí a efectuar una maceración de germen en agua, durante media hora, luego filtróse hasta obtener un líquido límpido, operación ésta un poco engorrosa que bien puede subsanarse utilizando una centrífuga, y al líquido de maceración obtenido se lo llevó a ebullición para destruir las proteasas.

A fin de ponernos en iguales condiciones con respecto a la concentración de Glutathione del ensayo anterior, fueron preparados dos amasijos, a uno de los cuales se le agregó el equivalente, a los 45 mg. de Glutathione en cc. de macerado de germen, completando con agua hasta alcanzar el grado de absorción fijado, procediendo luego igual que en el experimento anterior.

Ambos amasijos, como se observará en la fotografía n° 3, se comportan en una forma análoga a lo ya observado en el anterior ensayo (véase la foto n° 2), esto es que, el que contenía líquido de macerado de germen había perdido tenacidad, y se deformó, evidenciándose así que, la disminución de volumen de la pasta, es debida únicamente al Glutathione solubilizado durante la maceración del germen, y no, a los productos que de éste se han aislado.



Fotografía n° 2

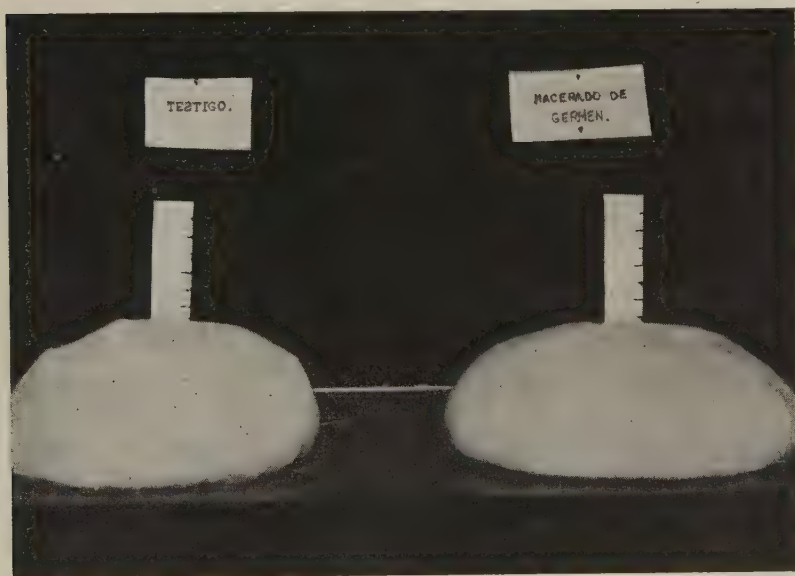
Deseando poner más aún de manifiesto, el efecto del Glutathione y del líquido de maceración, preparado de acuerdo a lo ya indicado, utilicé tal como lo hicieron los autores nombrados, el farinógrafo de Brabender, tomando para ello 300 gr. de harina, agregándole 100 mg. de Glutathione, y agua de acuerdo a su absorción.

Nuevamente efectué el ensayo, con la diferencia que esta vez se agregó el equivalente en Glutathione proveniente del líquido de maceración, cuyo farinograma se encuentra en la fotografía n° 4.

Y bien, si comparamos los farinogramas de la harina con Glutathione, con el del agregado con agua de maceración de germen, se comprueba la similitud de efectos producidos en la harina; y si los

cotejamos con el farinógrafo normal de la harina, comprobamos lo ya aseverado por Jorgensen respecto a la acción activadora del Glutathione.

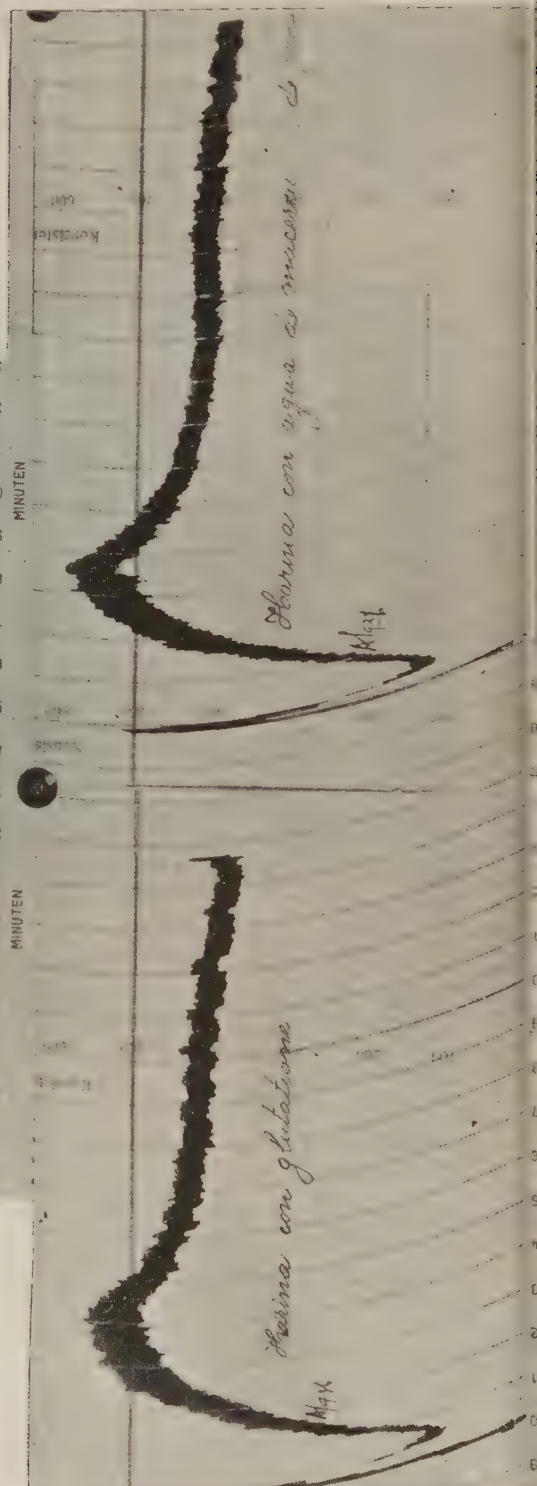
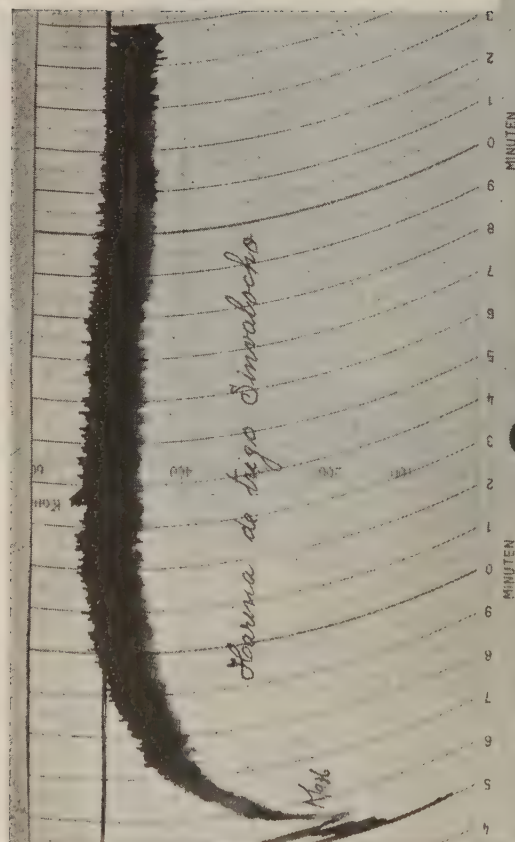
Pero deseando despejar toda clase de dudas, y con objeto de comprobar si tales hechos acontecen igualmente con las harinas elaboradas en los grandes molinos, efectué una serie de ensayos, de los

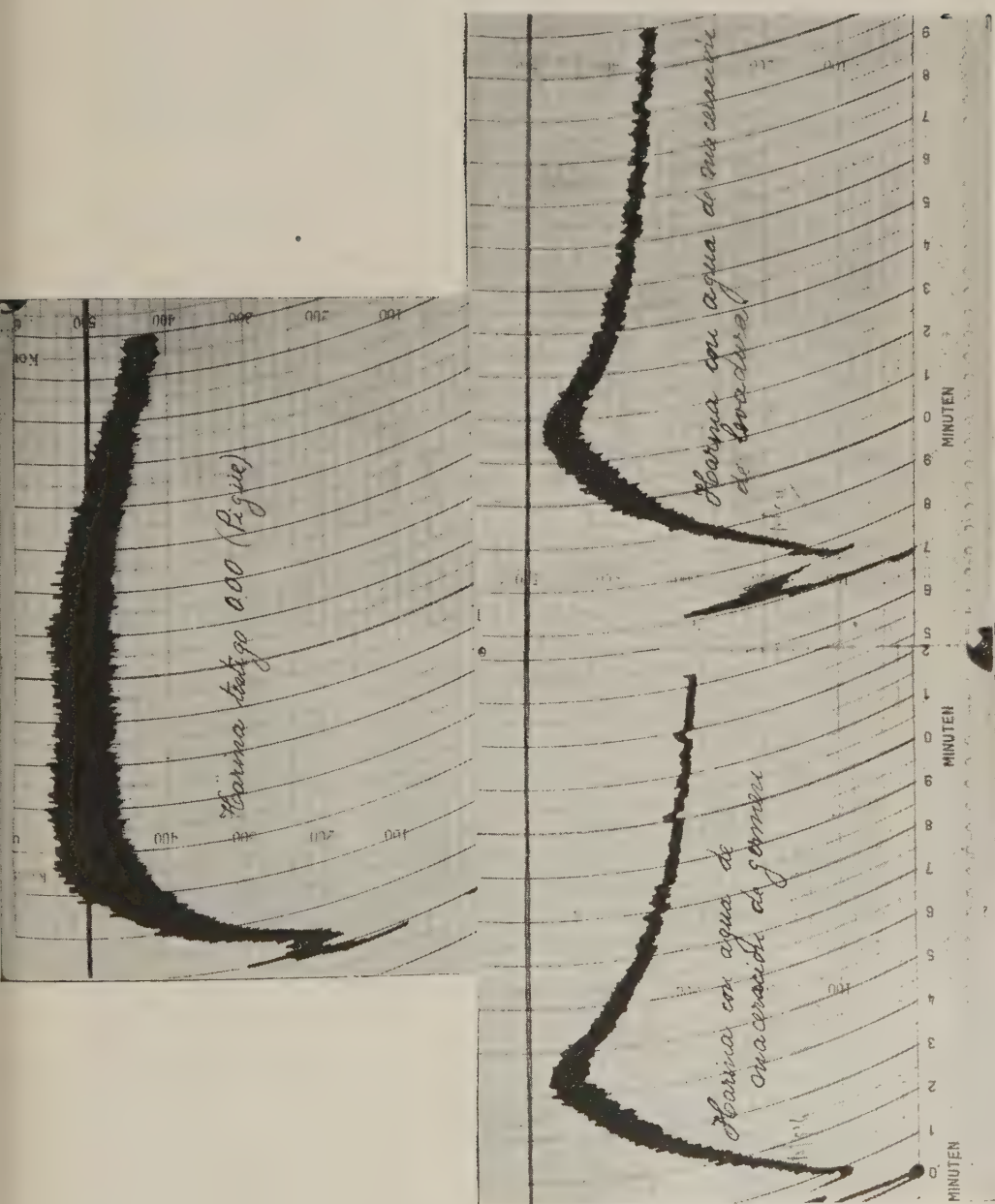


Fotografía nº 3

cuales reproduzco solamente un farinógrafo, que corresponde a una harina de Pigué, marca « 000 », y que denota sus buenas cualidades plásticas.

Los otros farinogramas obtenidos, y que se insertan en la misma fotografía que el anterior, nº 5, corresponden a la misma harina, pero con el agregado de líquido de maceración de germen, una, y la otra con el de líquido de levadura de cerveza; ambos conteniendo la cantidad de Glutathione, en la misma proporción que en los ensayos farinográficos anteriores.





Fotografía nº 5

CONCLUSIÓN

De los ensayos realizados, pónese de manifiesto, la acción perjudicial del Glutathione contenido en el germen de trigo, corroborando así lo ya demostrado por Holger Jorgensen en sus estudios sobre tal substancia, como también lo relacionado con el líquido proveniente de la maceración de la levadura de cerveza.

Y por último cúmpleme aclarar que estos ensayos se llevaron a cabo, hasta el mes de octubre de 1936, en que me ví obligado a dejarlos en suspenso con motivo de mi viaje a Europa. Hasta ese momento la bibliografía que conocía, no señalaba la presencia de este cuerpo en el germen de trigo.

Es pues para mí, motivo de íntima satisfacción el haber llegado a obtener, resultados que corroboran lo publicado por Sullivan, Howe y Schmalz, en noviembre de 1936, trabajos que conocí a mi regreso al país, en marzo de 1937.

BIBLIOGRAFIA

- ALBIZZATI CARLOS M. 1928. *Nota sobre la composición química del germen de «Triticum Sativum» y sus derivados.* «Rev. de la Fac. de Agronomía de La Plata», tomo XVIII, pág. 48-57.
- BALLS A. K. and HALE W. S. 1936. *Proteolytic Enzymes of Flour.* «Cereal Chem», Vol. XIII, N° 1, January 1936, pág. 54-60.
- BALLS A. K. and HALE W. S. 1936. *Further Studies on the activity of proteinase in Flour.* «Cereal Chem.», Vol. XIII, N° 6, November, pág. 656-664.
- HOUSSAY B. A. y MAZZOCCO P. 1927. *El glutathione y las propiedades reductoras de los tejidos de las ratas suprarrenoprivas.* «Rev. S. Argent. Biol.», año III, N° 1, pág. 112-125.
- JORGENSEN HOLGER. 1936. *On the existence of powerful but latent proteolytic enzymes in Wheat flour.* «Cereal Chem», Vol. XIII, N° 3, May, pág. 346-355.
- SULLIVAN B. NEAR CLEO and FOLEY GUY. 1936. *The Harmful action of wheat germ on the baking quality of flour and the constituents responsible for this effect.* «Cereal Chem.», Vol. XIII, N° 4, July, pág. 453-463.
- SULLIVAN B. HOWE MARJORIE and SCHMALZ F. D. 1936. *On the presence of Glutathione in wheat germ.* «Cereal Chem.», Vol. XIII, N° 6, November, pág. 665-669.
- TUNNICLIFFE H. E. 1925. *The occurrence and quantitative estimation of Glutathione in tissues.* «Biochem. Journ.», tomo XIX, pág. 194.
- WURMSER REN. 1930. *Oxidations et Réductions.* Paris.

Buenos Aires, junio de 1937.

NOTA SOBRE EL EMPLEO DE LA HARINA DE MALTA COMO « MEJORADOR BIOLÓGICO » EN LA HARINA DE TRIGO

POR EL DR. E ING. AGR. C. M. ALBIZZATI

Se denomina Harina de Malta, el producto obtenido de la molienda de la cebada germinada en condiciones especiales, oscilando su grado de extracción alrededor del 75 %. Su empleo como « mejorador » de la calidad panificable de la harina de trigo, es bien conocida por los industriales molineros y panaderos.

Su finalidad en tal sentido, es la de aumentar la cantidad de enzimas (amilasa) que hidrolizan el almidón, coadyuvando a un mejor trabajo de la levadura en la formación del gas carbónico. Pero es de hacer notar que conjuntamente con la incorporación del citado « mejorador » se introducen enzimas de otro orden tales como las proteasas y peptidasas que tienen la propiedad de desintegrar, a veces más de lo necesario, el complejo proteico denominado gluten (gliadina, glutenina) volviéndolo incapaz de retener el gas formado por pérdida de elasticidad y resistencia.

Los estudios realizados sobre la harina de malta por un conjunto de investigadores, han puesto en evidencia la acción proteolítica de la harina en cuestión como lo atestiguan los trabajos de Lüers y Malsch (1929), Fliel y Linderstrom (1929), los que demostraron la presencia de las proteasas, por su acción sobre la gelatina, y los últimos nombrados además, sobre edestina, ovo-albúmina, a un pH que oscilaba entre 4,9 y 5,0 y en cuanto a peptidasa, su acción sobre la leucilglicina en pH 7,5 y 7,9.

Y si nos referimos a la acción hidrolítica de las amilasas, hoy ya se conocen dos: la α amilasa (dextrinogénica) y la β amilasa (sacarogénica), que fueron plenamente establecidas por Olhsson (1930), y confirmadas por Edfeldt North (1930), y Van Klinkenberg (1931), Lüers y Rummeler (1933-1935), Chrzaszcz y Janicki (1933).

Demostrada la presencia de las diferentes enzimas por los autores citados, y en el deseo de cerciorarme de la calidad de la harina de

malta, que como «mejorador biológico» se expende en el país, se recolectó un total de ocho muestras, obligándome por razones obvias a omitir sus procedencias, y cuyos valores analíticos se expresan a continuación en los diferentes cuadros insertados más abajo.

En la elección de los métodos para determinar la actividad enzimática utilicé el de Egloffstein y Pollak ya publicados en extenso, y aunque si bien es cierto éste, como los de Rumsey (1922), Rumsey-Kent Jones (1924), Blisch Sandstedt (1933), Litner y otros, son todos fácilmente aplicables en los laboratorios, quise emplear un procedimiento que cuidadosamente utilizado diera valores cotejables y de mejor apreciación para las personas poco habituadas al mismo.

El consiste en preparar de acuerdo a la siguiente fórmula, un amasijo así:

Harina	100	gramos
Levadura	3	»
Sal	1,5	»
Harina de Malta	0,20	»
Agua	57,5	»

Se efectúa el amasado y se toman trozos de pasta de igual peso, dándoles forma cilíndrica y colocándolos en probetas construídas de exprofeso, teniendo cuidado de hacer una leve compresión. Luego se pone el conjunto en una estufa a 30°C anotándose cada 30' la variación de volumen.

Los ensayos realizados se efectuaron siempre por duplicado, siendo sus valores medios los que se indican en el cuadro n° 1.

CUADRO N° 1

Muestras de harinas.	Aumento total de volúmen	Incremento de volúmen %	Valores de Egloffstein y Pollak
Testigo	100,00	0	—
1	107,5	7,5	4800,0
2	105,0	5,0	4802,0
3	87,5	— 12,5	3300,0
4	130,0	30,0	6948,0
5	117,5	17,5	7638,0
6	107,0	7,0	3894,0
7	126,5	26,5	6988,0
8	115,0	15,0	6362,0

La temperatura de fermentación fué de 30°C.

El tiempo de fermentación de 240'.

Los valores obtenidos en este cuadro, con los métodos indicados, nos ponen de manifiesto la diferencia de poder diastásico entre las harinas de malta estudiadas, y en lo que respecta al aumento de volumen, éste es más fácilmente comprensible cotejando los valores que da el cuadro nº 2, en donde se observa en general que el máximo de volumen de la pasta en los diferentes ensayos, está en los primeros sesenta minutos, vemos también que el aumento de volumen se desarrolla de una manera diferente e irregular, aconteciendo tal como en las muestras 3, 6 y 7 que éste llega al máximo para ir luego decayendo paulatinamente.

CUADRO Nº 2

Variación de volumen en los amasijos estudiados

Tiempo de fermentac.	Testigo	1	2	3	4	5	6	7	8
30'	30.00	35.00	40.00	40.00	40.00	45.00	42.50	50.00	52.50
60'	65.00	60.00	57.50	52.50	62.00	58.00	60.00	65.00	42.50
90'	1.50	7.50	2.50	2.50	10.00	7.00	2.50	0.00	0.00
120'	1.50	2.50	1.00	0.00	7.50	5.00	2.50	0.00	5.00
150'	1.50	0.00	0.00	1.00	0.00	2.50	0.00	0.00	10.00
180'	0.50	0.00	0.00	0.00	2.50	0.00	0.00	5.00	0.00
210'	0.00	2.50	0.00	— 6.00	0.00	0.00	12.50	10.00	2.50
240'	0.00	0.00	4.00	— 3.00	8.00	0.00	— 13.00	— 3.50	2.50
	100.00	107.50	105.00	87.00	130.00	117.50	107.00	126.50	115.00

Este hecho me indujo a pensar que además de conocer el valor diastásico de una malta, para ser utilizado como « mejorador » debería de conocerse también su valor proteolítico, dado que esa disminución de volumen de la pasta, podría ser debido a la acción de la proetesa sobre el gluten de la harina. Para cerciorarse de si tal hecho respondía en efecto a ello, efectué la determinación en todas las muestras, utilizando el método de Sorensen modificado por Cairns y Bayley (1928).

Reactivos:

- Solución Na(OH) 0,01 N.
- Solución neutra de formol (preparada neutralizando con Na(OH) una solución al 45 % usando fenoltaleína como indicador).
- Fenoltaleína al 0,5 % en alcohol de 95°.

Técnica: Se toman 25 gr. de harina a analizar, se la coloca en un Erlenmeyer de capacidad de 200 cc. agregándosele 100 cc. de agua destilada (que contiene 0,5 cc. de tolueno por litro), se coloca en baño-maría regulado a 37°C durante 60'. Se agita el Erlenmeyer cada 15' y al final de los 60' se clarifica por centrifugación. Se toman 50 cc. y sobre este volumen se agregan 1 cc. de fenolftaleína, valorándose con $\text{Na}(\text{OH})$ 0,01 N, tomándose debida nota de de los cc. gastados. Luego se agregan 10 cc. de solución de formol con lo que la coloración rosada desaparece; se agita durante 5' y se vuelve a titular con $\text{Na}(\text{OH})$ 0,01 N hasta la reaparición del color, volviéndose a tomar nuevamente nota de los cc. gastados. Si denominamos A a los cc. gastados en la primera determinación y A' a los de la segunda, tendremos que $A' - A = \text{cc. de Na}(\text{OH})$ 0,01 N que representan la cantidad de álcali necesaria para neutralizar los ácidos formados por 12,5 gramos de harina. Expresándose la actividad proteolítica por la cantidad de $\text{Na}(\text{OH})$ 0,01 N necesaria para neutralizar los ácidos formados en una hora por 10 gr. de harina.

Los datos obtenidos se han llevado a cabo con el método arriba indicado, variando únicamente el tiempo de calentamiento que fué de dos horas.

CUADRO N° 3

Muestra	$\text{Na}(\text{OH})$ 0.01 N por 10 gr. de harina en 2 horas
1	0.52
2	0.50
3	0.73
4	0.20
5	0.50
6	0.61
7	0.50
8	0.54
Testigo	0.37 cc.

Observando la cifras obtenidas en el cuadro N° 3, se pone en evidencia que la harina de malta ha modificado la actividad proteolítica de la harina testigo, salvo en un solo caso, (muestra 4); donde el valor obtenido es menor aún que en la misma harina testigo.

Este hecho me llamó la atención dado que la harina de malta en este caso, no actuaba como «mejorador» únicamente de la harina testigo en la producción de gas, sino que lo hacía también como inhibidora sobre las proteasas contenidas en ésta.

Teniendo en cuenta los ensayos realizados por Jorgensen (1935) sobre las sustancias que actúan como inhibidoras de la acción proteolítica pude comprobar la presencia de bromato de potasio utilizando para ello la reacción de Denigès-Chelle, comprobando de esta manera lo ya indicado por el citado autor sobre la aplicación del Bromato de Potasio como excelente inhibidor de tales enzimas. Hecha la misma investigación sobre las otras muestras extraídas, el resultado obtenido fué negativo.

De los datos anteriores podemos deducir que el efecto del « mejorador biológico » sobre cada una de las muestras de harina estudiadas, es el siguiente:

Las muestras 1 y 2 poseen de acuerdo a las cifras de Egloffstein-Pollak la misma actividad diastásica, aconteciendo igualmente con el valor proteolítico determinado, y que los volúmenes por la introducción de ellas en harina de trigo, producen un aumento con relación a esta última de 7,5 % y 5 % en cc.

En las muestras 4 y 7 se observan que las cifras de Egloffstein-Pollak son también semejantes, pero en cambio su acción proteolítica es bastante diferente en la primera, por contener Bromato de Potasio. Este ha actuado inhibiendo la acción proteolítica evitando así una disgregación del gluten, sucediendo todo lo contrario en la muestra N° 7 que solo alcanza a producir un aumento del 2,65 %, mientras que en la muestra N° 4 produce un aumento del 30 %.

La muestra N° 3 es la que ha dado el volumen más bajo, y que corresponde a una disminución del 12,5 % con respecto al valor de la harina testigo, y debiéndose esta acción perjudicial a su alto contenido en proteasas y su bajo poder enzimático.

En las muestras 5, 6 y 8 se ha producido un aumento de volumen del 17,5 %, 7 % y 15 % correspondiendo los valores de su actividad enzimática y proteolítica a 7638, 3894 y 6362' (valores de Egloffstein-Pollak) y 0,50, 0,61 y 0,54.

En conclusión, de los datos obtenidos en las harinas de malta estudiadas, se demuestra en forma indudable la necesidad que existe de determinar, además de su actividad diastásica, su actividad proteolítica.

Solo así, podrán hacer verdadero uso de tal producto, aquellos que buenamente deseen trabajar con él, haciendo caso omiso a la propaagnda comercial, que con indicación de procedimientos, cantidades a emplear, etc., efectúan los interesados en su venta.

BIBLIOGRAFIA

- ALBIZZATI C. M. y CARRADO G. J. 1935. *Evaluación de la actividad enzimática en las harinas de trigo y malta*. «Anales de la Unión Ind. Arg.», año XLVIII, N° 797. Mayo 1935.
- CAIRNS A. and BAYLEY C. A. 1928. *A study of the proteolytic activity of flour cereal*. «Cereal Chem.», N° 2, Vol. V, March, pág. 79-107.
- READ J. W. and HAAS L. W. 1934. *Baking Quality of Flour as affected by certain Enzyme actions*. «Cereal Chem.», N° 3, Vol. XI. May, pág. 280-298.
- READ J. W. and HAAS L. W. 1936. *Further Studies on the Baking Quality of Flour as affected by certain Enzyme actions*. «Cereal Chem.», N° 1, Vol. XIII. January, pág. 14-37.
- READ J. W. and HAAS L. W. 1937. *Baking Quality of Flour as affected by certain Enzyme actions III. Purified Amylase and the relative Proteolytic Activity of amylolytic agents*. «Cereal Chem.», N° 1, Vol. XIV. January, pág. 59-73.
- TISSUE K. A. and BAYLEY C. H. 1931. *A Study of the Proteolytic Enzymes of Malt preparations*. «Cereal Chem.», N° 3, Vol. VIII. May, pág. 217-226.
- Buenos Aires, junio de 1937.

SECCIÓN OFICIAL
DE LA
SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
SECCIÓN "SANTA FE"

Sesión de comunicaciones del 25 de Junio de 1937

En una de las aulas de la Facultad de Química y bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester, se realizó el 25 de Junio a las 18 horas, una sesión de comunicaciones científicas, considerándose las comunicaciones cuyos resúmenes se publican a continuación:

SOBRE UN PROBLEMA DE DESCARTES

Por JOSE BABINI

En esta comunicación, que el autor presenta como adhesión a los homenajes a Descartes, en el tercer centenario del «Discurso del metodo», se considera la solución general de un conocido problema de Descartes relativo a la cuestión inversa de la rectificación de la circunferencia.

MICROANALISIS ELEMENTAL ORGANICO POR GASOMETRIA

Determinación simultanea del N, C e H

Por GUILLERMO BERRAZ

La combustión de las sustancias orgánicas con óxido de cobre (y cobre metálico) origina en el vacío o a presiones muy bajas, los mismos productos que a la presión ordinaria, a saber CO_2 ; H_2O y N libre. Haciendo pasar estos productos por un tubo en U sumergido en aire líquido, en comunicación con un manómetro por intermedio de un recipiente de volumen adecuado, el CO_2 y H_2O se condensan y solo el N ejerce presión. Sustituyendo el aire lí-

quido por nieve carbónica-acetona (-80°), el CO_2 se gaseifica pero no el agua ($p = 0,0004$); la presión medida corresponde a la suma del N_2 y CO_2 . Finalmente, si se deja al tubo en U alcanzar la temperatura ambiente, el vapor de agua acusará un nuevo aumento de presión. Entre la cantidad de substancia combustionada y el volumen del sistema debe existir una relación tal que la presión total de los gases sea inferior a la tensión del vapor de agua a la temperatura ordinaria, para que el agua formada actúe siempre como vapor no saturado.

En las experiencias realizadas se utilizó un aparato, cuya descripción y técnica operatoria se omiten en este resumen; consta esencialmente de: Tubo de combustión (cuarzo) con espirales de cobre oxidado y reducido, condensador en U, trasladador de gases, tubo de expansión, micromanómetro McLeod, conexión con bomba de vacía (0,001 mm) y cierres de mercurio para evitar las grasas.

Los ensayos de combustión efectuados con diversas substancias, especialmente nitrogenadas y volátiles, han puesto de manifiesto que una vez afinada la técnica, los errores experimentales del método propuesto caerán dentro de los límites de tolerancia admitidos en los micrométodos gravimétricos.

Este nuevo método de análisis elemental permite determinar el Nitrógeno, Carbono e Hidrógeno en una sola operación, con cantidades de substancias no mayores de 1,5 miligramos.

REPRESENTACION CONVENCIONAL DE LOS APARATOS Y MATERIALES DE LABORATORIO

Por G. CHRISTEN y G. BERRAZ

Con el objeto de uniformar y simplificar el trazado de los dibujos que representan los aparatos y material de Laboratorio, los autores proponen, a título de ensayo un sistema convencional de símbolos y figuras tendientes a esa finalidad y con vistas especiales a las tareas docentes.

En la representación esquemática de los útiles y aparatos se han ajustado a las siguientes directivas:

- a) Suprimir todo elemento o detalle cuya presencia es obligada y su rol se sobreentiende, como p. ej. soportes, tapones, conexiones, etc.

- b) Evitar las líneas paralelas próximas entre sí. Los tubos, cuellos de balones, pipetas, buretas, etc., se representan por una sola recta.
- c) Procurar que el dibujo sea de fácil trazado. Las principales figuras geométricas que intervienen son rectas, triángulos, rectángulos y circunferencias completas.

LA «MAGALLANITA», UN NUEVO MINERAL BITUMINOSO

Por G. A. FESTER, J. CRUELLAS y F. GARGATAGLI

Desde hace muchos años se observa cerca de Magallanes un mineral negro, bituminoso, periódicamente arrojado por el mar a la orilla. Encontrándose en la cercanía yacimientos de lignito, como también perforaciones que revelaron la presencia de petróleo, hubo dudas si se trata del primero o de un producto asfáltico. Puesto que el yacimiento del mineral no es accesible, no se podían aplicar con seguridad criterios geológicos y hubo que recurrir al examen químico que nos dió la oportunidad de estudiar en general los métodos para discernir entre lignitos, asfaltos y asfaltitas. Hemos llegado así al resultado, que una distinción segura siempre es posible, pero no por la determinación de un solo dato válido en todos los casos, sino que hubo que aplicar varios métodos de ejecución fácil. En el caso concreto, hemos comprobado, en primer lugar por la cantidad exigua de humedad del producto, que no se trata de un lignito sino de un asfalto. Suponemos que cerca de la costa brote paulatinamente un petróleo pesado asfáltico, el cual por el contacto con el agua salada y quizás por la luz difusa sufre una polimerización, transformándose en asfalto sólido. Por la resistencia elevada mecánica y eléctrica se podría pensar en aprovechar el producto como sustituto de la ebonita.

Ciclo de Conferencias

LA MIGRACION DE LOS SIMBOLOS

Conferencia del Sr. DUNCAN L. WAGNER

El 4 de Mayo se realizó en el salón de actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola de Santa Fé, una conferencia organizada por la « Sección Santa Fé » de la Sociedad Científica Argentina a cargo del Vice-Director del Museo Arqueológico de Santiago del Estero S. Duncan L. Wagner.

Dicha conferencia fué ilustrada con numerosas proyecciones, reproducciones de piezas de alfarería halladas en los tumulus de la región de Santiago del Estero.

Después de haber hecho resaltar la importancia capital que representa para el estudio de la Prehistoria universal y la del Americanismo, el descubrimiento de ese misterioso « Imperio de las Planicies » surgido tan inopinadamente y ante la sorpresa de todos de las sombras más oscuras del pasado, el conferenciante entró de lleno en el asunto indicado por el título de la disertación, esa Migración de Símbolos a la que el espíritu comprensivo y penetrante del Conde Goblet d'Abiella ha ligado su nombre.

Ante un auditorio ya al corriente del tema a tratar, su intención no era, declaró el señor Wagner, hacer desde luego, un estudio profundo de la gran Civilización prehistórica generalmente conocida en los círculos científicos de Ambos Mundos bajo el nombre de Civilización Chaco-Santiagueña.

Antes de abordar el fondo mismo del asunto ha juzgado conveniente sin embargo, evocar rápidamente la majestuosa imagen de ese pueblo desaparecido que no ha dejado nombre en la Historia, a pesar de que se encuentran diseminadas sobre toda una vasta región de la América Austral, las trazas de su larga permanencia y las pruebas de su cultura notablemente adelantada.

Sedentarios, de costumbres aparentemente mansas, y de naturaleza más bien pacífica, agricultores y pastores y tejedores muy hábiles, estos constructores de tumulus de las llanuras santiagueñas, han sido antes que nada ceramistas notables y ornamentistas dotados del más elevado sentimiento artístico y de una particular concepción de la belleza.

A fin de llevar la convicción al ánimo de su auditorio, el conferenciante antes de avanzar en la exposición, proyectó sobre la pantalla cierto número de piezas de cerámica elegidas entre las 22.000 que encierran las vitrinas o que adornan los estantes del Museo de Santiago del Estero.

Francisco Moreno, prosiguió, tan distinguido humanista como etnólogo y paleontólogo eminente, había presentido el verdadero carácter de esta misteriosa civilización de los antiguos habitantes de la llanura boscosa que se extiende en suave pendiente desde los últimos contrafuertes de los Andes hasta las orillas del Río Paraná. « En Santiago del Estero, escribía él hace exactamente cincuenta y cinco años, vivió un pueblo dotado de un sentimiento artístico muy elevado: la alfarería fué allí aún más fina, más elegante que la de Troya y de Micenas en la Grecia antigua; los colores se conservan con una viveza admirable ».

Este genial precursor de la arqueología argentina no había tenido para documentarse más que una pequeña colección de cerámica proveniente de esta provincia, que desapareció a su muerte y que nunca se ha podido encontrar. Como lo ha dicho Ameghino: « Ella se perdió para la ciencia ». La clarividente intuición del sabio humanista, amante ferviente de la belleza antigua, había sido suficiente para que viera flotar sobre las llanuras hoy desoladas, un reflejo de la divina sonrisa de la Hélade inmortal. La visión del sabio había sido profética. Llegaría el día en que se descubrieran en esas áridas arenas, fusaiolas absolutamente idénticas a aquellas que, mientras la ciudad de Priamo desaparecía entre las llamas, escaparon de las manos desfallecientes de las princesas troyanas.

El arte de la cerámica de aspecto tan notable en la Civilización Chaco-Santiagueña, que se distingue por la intensidad de su simbolismo, no ha ignorado, en efecto, ninguno de los refinamientos y delicadezas de expresión de una ideografía de las más sutiles. El se presta, según el conferenciante, a un estudio profundo de esa Migración de los Símbolos a la que la Escuela de Arqueología de Santiago del Estero, cuyo método « geográfico-visual » ha sido ampliamente expuesto en conferencias pronunciadas en Córdoba, Rosario y en esta ciudad, ha dado una importancia capital. Esta cuestión ha sido considerada desde dos puntos de vista diferentes. Unos afirman que no ha podido haber migración de símbolos que no haya sido acompañada por migración de pueblos que hayan hecho uso de ellos primeramente. Otros autores, por el contrario, han sostenido que esos signos visibles y tangibles donde se han exteriorizado, materia-

lizado, se podría decir, las diferentes formas concretas o abstractas del pensamiento humano, habrían sido probablemente llevadas a través de las primeras rutas del mundo por viajeros aventureros, por misioneros de religiones primitivas o por emisarios de sociedades esotéricas, que poco a poco habrían extendido así el radio de su influencia sobre las regiones inmensas, casi ilimitadas del mundo de la prehistoria.

Aislados o en pequeños grupos, estos peregrinos de las primeras edades, habrían, durante el curso de sus largas y pacientes peregrinaciones a las que ningún obstáculo natural oponía ninguna barrera realmente infranqueable, sembrando los caminos infatigablemente recorridos por ellos de símbolos de la fé, de la que eran los primeros apóstoles, o de contraseñas de sociedades secretas de las que ellos propagaban las doctrinas esotéricas y las misteriosas prácticas. De esos signos enigmáticos y de esas ideas que se relacionan con ellos hay más de una que subsiste todavía en medio de los centros que más han evolucionado.

Gracias a este procedimiento de difusión lenta, de constante e insensible penetración, nunca completamente interrumpida, símbolos y contraseñas cuyo sentido está destinado a escaparnos en la mayor parte de los casos, transmitidos de mano en mano y de boca en boca invadieron las tierras habitadas de Ambos Mundos. Así se explicaría, en las regiones más apartadas las unas de las otras y separadas por toda la extensión de los mares y de los continentes, la presencia de ideogramas tan idénticos que parecerían copiados los unos de los otros. Nacidos de un mismo pensamiento, parecería que las mismas manos los hubieran trazado.

Estos son, por no citar más que algunos, la cruz simple, la cruz en T y la llamada de San Andrés, el *tan* y la cruz escalonada, la célebre y hoy algo ruidosa *svastika*, el signo escalonado, el triángulo simple y el triángulo hendido, símbolo de la generación femenina, el águila de dos cabezas, el signo en S representante de la Serpiente, a menudo bicéfala, los dioses y diosas de la lluvia, portadores o portadoras de vasos, a veces antropoornitomorfos, la divinidad con « cabeza de lechuza », las estatuillas de pico de pájaro y ojos humanos que frecuentemente derraman lágrimas, los dioses en forma de cono, los pájaros y hombres-pájaros adoradores del fuego celeste y de otros mitos prometeicos, los diluvios y las areas, instrumentos de divinos salvatages, sin olvidar las palomas y los cuerpos exploradores de las aguas desbordadas, los Huevos Cósmicos y los Gemelos Divinos, el Dragón soberbiamente tocado de plumas o de cuernos de ciervo, la

bella Culebra Emplumada igualmente adornada y los Pájaros del Trueno (los Thunder Birds), el Símbolo de la Mano y el de la griega que se deriva de él, el Ojo en la palma de la Mano, uno de los más enigmáticos, el Símbolo de las Lágrimas, el Ojo que el Egipto ha divinizado como los mejicanos y que los Mayas sentaban en un trono y tantos otros extraños signos eternos viajeros que de un polo a otro han dejado trazas de su paso.

Según los defensores de semejantes hipótesis, los Héroes Civilizadores, cuya imagen indecisa o esencialmente fugitiva se levanta (Quetzalcoatl, Kuculkan, Wotan, Bochica, Wiracocha) en el horizonte de todas las antiguas civilizaciones americanas, habrían sido portadores de antorchas, semi-dioses prometeicos, mensajeros venerados de símbolos sagrados, de mitos y de emblemas.

Después de ellos aparecerían los servidores de los altares primitivos elevados a Dioses Desconocidos, algunas veces indulgentes, más a menudo sanguinarios y crueles, y los sacerdotes de cultos esotéricos, los iniciados en los « Misterios » cuyo nombre como los de Eleusis, de Delfos o de Saís, no ha sobrevivido en la memoria de los hombres, sino bajo la forma de tradiciones desnaturalizadas y confusas o en leyendas poéticas a menudo inventadas. Pero ellos han existido tanto en el Nuevo como en el Viejo Continente. Los *Kivas* de los Indios que poblaron el Arizona y las cavernas del Yucatán y del Perú en cuyas paredes se ven dibujos de manos pintadas en rojo, en negro y en otros colores, serían testigos, si pudieran contarlas, de las extrañas ceremonias que en ellas se realizaban.

Las hipótesis de que acabamos de hablar, dijo el señor Wagner, nos cautivan por su encanto pintoresco y su atrayente sencillez. Nos agrada figurarnos a esos intérpretes mensajeros del ideal, a esos peregrinos de lo desconocido, llevando a través de las primaveras del mundo los tizones tomados de los fuegos encendidos de los primeros altares, murmurando al oído sorprendido de los neófitos maravillados, misteriosas palabras, extrañas contraseñas, que se podían representar por medio de formas singulares, trazadas sobre el polvo del camino, grabadas sobre la madera, sobre el hueso, sobre el metal o sobre la piedra, pintadas sobre la arcilla endurecida al fuego o sobre la tela y donde fuera fácil retener sus diferentes aspectos. El significado de todos esos símbolos se grabaría en la memoria de los primeros iniciados y ellos no tendrían dificultad en transmitirlos a nuevos adeptos, quienes a su vez los harían conocer por otros a lo lejos.

Una concepción tan seductora, es de las que más nos atraen. Ella

favorece e incita a la tendencia al esfuerzo mínimo tan común a la mayoría de los hombres. Al aceptarla nos evitamos el pesado trabajo de tener que buscar contactos directos o indirectos que hayan podido existir entre pueblos que llevaban en su frente los mismos signos misteriosos y al mismo tiempo la tarea más ardua todavía de determinar las rutas seguidas a través del mundo por las primeras migraciones humanas. No será necesario interrogar a la Esfinge a quien tantos Edipos han pedido en vano la solución del Enigma.

Un método semejante rechaza todas las dificultades y suprime todos los obstáculos. Para explicar el misterio del ojo en la palma de la mano que se encuentra entre los Hidastas de Alaska y entre los Mound-Builders de Arkansas y de Santiago del Estero, lo mismo que entre los Aztecas de Méjico, los Mayas de Yucatán y los insulares de la Indonesia y de la Oceanía, para no asombrarse de que las fusaiolas encontradas a orillas del Río Salado lleven grabados signos idénticos, en número igual y dispuestos en el mismo orden que en aquellas encontradas por Schliemann en Hissarlick, entre las cenizas de Troya, no es necesario recurrir al atrevimiento de las vastas hipótesis, éxodos en masa, heroicos argonautas, buscadores de filones de oro o de Islas Afortunadas, pueblos que huyen de la amenaza del hambre, de la sequía, de las inundaciones o presas de pánico ante el anuncio de una catástrofe o de una invasión próxima.

Y si se agregan las teorías de las convergencias y de las creaciones independientes, todo se arregla sin mayor esfuerzo: no más problemas étnicos y geográficos poco fáciles de resolver, no más rupturas de puentes, de continentes desaparecidos poco a poco bajo las aguas, adiós para siempre las desvanecidas y legendarias Atlántidas! Y menos todavía de la Gran Civilización Primordial, esa pesadilla de los partidarios de la convergencia. Cada raza humana, cada familia, cada clan, tribu, pueblo o nación, se habrá abierto así camino independientemente y a su hora y a su manera habrá elaborado los elementos de su propia civilización. Y cuando a pesar de todo, los parecidos demasiados visibles entre los elementos de cultura pertenecientes a pueblos separados los unos de los otros por vastas extensiones de mares y de continentes, nos llamen la atención, nos guardaremos bien de insistir, y para encontrar a estos hechos tan desconcertantes una explicación más o menos aceptable, será suficiente admitir que se trata no de migraciones de pueblos, sino de simples migraciones de símbolos. Esos signos extraños, letras de un alfabeto universal misterioso, siempre y en todas partes reconocidos, habrían sido llevados por misioneros aislados, por algún grupo de

náufragos, por mercaderes aventureros, por corsarios ávidos de nuevos botines, a las playas más lejanas junto con el polvo del suelo natal adherido a las suelas de sus zapatos.

No es el caso, dijo el conferenciante, de rechazar completamente en su conjunto y como asunto resuelto esas teorías y esas tentativas de explicar hechos que es imposible pasar en silencio. La ciencia se debe a sí misma el examinar con una absoluta objetividad todo argumento puesto a discusión que ofrezca una apariencia de verdad; ninguna posibilidad en la que entre un elemento de probabilidad por débil que sea, debe ser descartada. En una hipótesis que puede parecer de las más aventuradas, hay a menudo ideas útiles. Para hacer comprender bien el mecanismo, tan complejo en realidad, a pesar de su aparente sencillez, de la Migración de los Símbolos, y para poder apreciarlo con toda exactitud, el conferenciante hizo uso de cierto número de ellos que le parece pueden servir como ejemplos entre los más ilustrativos: el Ojo en la Palma de la Mano, el Signo Escalonado, las diferentes formas de la Divinidad Neolítica de Schliemann y de Dechelette (urnas con cabeza de lechuza y estatuillas de Hissarlick, divinidades de las grutas del Marne, de Couलगues y de Saint Servin) la Swastika y finalmente las fusaiolas de Santiago del Estero idénticas a las de la clásica Ciudad Troyana.

Es viendo directamente los objetos y localizándolos en lo que él se apoya para demostrar lo bien fundadas de las hipótesis que la Escuela de Santiago del Estero ha hecho suyas y se empeña en hacer conocer. Ellas tienen como fundamento principal el reconocimiento del origen común de todas las civilizaciones de Ambos Mundos, realmente dignas de ese bello nombre, que han florecido bajo el sol.

Se debe sin embargo admitir la posibilidad de que ciertos símbolos sobre todo aquellos de un carácter más netamente esotéricos, que hayan sido encontrados en condiciones de aislamientos particularmente notable, sin estar acompañados de los que habitualmente se encuentran a su alrededor, podrían haber sido trasladados separadamente y a grandes distancias de su centro de irradiación primitivo, por la acción individual de propagandistas aislados o de pequeños grupos de viajeros que hubieran seguido por su propia voluntad un itinerario determinado por tierras o por mares o que se hubieran visto alejados de su ruta por circunstancias ajenas a su voluntad!

Pero el conferenciante ha señalado bien que esta explicación no sería aceptable cuando se tratara de regiones diferentes, de una extensión a menudo considerable, separadas las unas de las otras por grandes distancias donde esos numerosos símbolos se encuentran en

combinación con otros elementos de cultura, formando bloques étnicos tan semejantes unos a otros que no se podría dejar de reconocer como ramas desprendidas de un mismo árbol. No es el caso entonces de pensar en el transporte de símbolos aislados, sino en la migración de pueblos enteros. Esas colonias desprendidas de un gran centro de Civilización primordial, son las hijas de una misma madre común de la que han conservado los rasgos.

Abordando enseguida otro aspecto de la cuestión, el señor Wagner se empeñó en hacer resaltar el contraste sorprendente que ofrece la prodigiosa riqueza del simbolismo americano y la relativa pobreza del de Eurasia, donde se creería encontrar sólo un pálido reflejo de la artística suntuosidad que distingue tan notablemente la ideografía del Nuevo Mundo. Será necesario pensar (y estamos en nuestro derecho al hacerlo) si esos motivos simbólicos y esos ideogramas que en América se presentan revestidos de tan singular y original esplendor, desde las soledades glaciales de Alaska hasta las plataformas de los Andes, tienen su origen en las representaciones más que modestas, anónimas, podríamos decir, que caracterizan la iconografía del Antiguo Continente. No sería lo contrario lo más aceptable? Y aquí se nos presenta un interrogante que domina los diferentes aspectos del asunto: en qué sentido se han dirigido las ondas sucesivas que han llevado de un extremo al otro del mundo sus innumerables símbolos, mudos testigos del pasado que constituyen uno de los más importantes elementos del patrimonio intelectual de la Humanidad?

La solución más prudente que es la que propone la Escuela de Santiago del Estero, no sería la de admitir que no existe hasta el presente ninguna prueba positiva del sentido hacia el cual se han dirigido las primeras corrientes migratorias en las épocas de la prehistoria y que el centro de irradiación del que han emanado escapa todavía a nuestros investigadores? Vale más limitarse por ahora a buscar la situación de los centros de civilización más antiguos de Ambos Mundos, estudiar con cuidado cada uno de ellos por separado y la correlación que pudieran haber tenido con otros semejantes. Cuando gracias a este método analítico, geográfico y visual haya sido establecido un mapa arqueológico del mundo prehistórico lo más exacto posible, habrá llegado el momento de tratar de encontrar las rutas y los puentes tomando como guías esos maravillosos jalones que son los enigmáticos símbolos que tantos pueblos diferentes han conocido y venerado sobre la tierra, desde la aurora de las civilizaciones más antiguas.

Entre los centros de antiguas civilizaciones de que acabamos de hablar, no hay ninguno digno de llamar la atención del sabio, del arqueólogo, del historiador y del filósofo, como el Imperio prehistórico que ha tenido como asiento principal el vasto territorio actualmente comprendido entre los límites políticos de la provincia de Santiago del Estero y que parece haber tenido influencia sobre una parte de las regiones vecinas. La gran antigüedad de la Civilización que allí ha reinado es un hecho sostenido ahora por la ciencia. Que ella ha sido contemporánea al menos de las primeras ciudades troyanas lo prueban las numerosas fusaiolas encontradas en los tumulus exactamente iguales a las de Hissarlick. Esto nos lleva a 3000 años aproximadamente a J. C. Pero es necesario comprender que esto que escapa a menudo a ciertos espíritus sistemáticamente opuestos a admitir la gran antigüedad de las civilizaciones pre-colombianas que tanto para las civilizaciones llamadas Minoceica y Egeica como para aquellas del Nuevo Mundo, estos datos deben ser considerados como punto de llegada y no como punto de partida. Cuántos miles y miles de años pueden haber ya conocido estas diferentes etapas de la cultura humana, antes que las murallas de Troya o las torres del palacio de Knossos hubieran proyectado su sombra sobre las llanuras llenas de sol de la Helade pre-homéica? Y cuántos miles de años han podido pasar sobre los tumulus de Santiago del Estero antes que los últimos de aquellos que los construyeron hubieran rendido su tributo a la tierra, muchos siglos antes que las carabelas de Colón hubieran orientado sus proas hacia la inmortal aventura? Carecemos en absoluto de datos que podrían permitirnos emitir una hipótesis sobre este punto, edificada sobre una base sólida de hechos probados.

Cuál ha sido la fecha de fundación de este poderoso Imperio de las Planicies que no habiendo conocido el empleo de los metales había llegado a un estado de civilización tan avanzada? Parece transportado allí por alguna intervención milagrosa, caído del cielo, diríamos, como un fragmento desprendido de civilizaciones pre-helénicas que han florecido entre la época de transición de la Edad de Piedra y de la Edad de Bronce. Salvo la arquitectura que no ha podido existir en una región donde falta la piedra y donde el empleo del ladrillo no ha penetrado, encontramos los caracteres más impresionantes de la primitiva cultura egeica. Al lado de las grandes urnas funerarias « con cabeza de lechuza » de Troya, de fusaiolas y de estatuillas de divinidades antro-po-or-ni-to-mor-fas, hay las pequeñas urnas sepulcrales provistas de esos curiosos apéndices levantados hacia el cielo en los cuales Schliemann ha reconocido estilizaciones de falos. Urnas de esta

forma no han sido encontradas más que en Hissarlick y en Santiago del Estero y tanto unas como otras contenían esqueletos de niños!

Un conjunto de cosas semejantes bien constatadas, a las que se agregan muchas otras también convincentes, no dejan de emocionar a aquel que se encuentra de pronto frente a realidades tan turbadoras como desconcertantes. Todo esto provoca movimientos de rebelión en los espíritus timoratos que no pueden tolerar el verse molestados así en sus divagaciones habituales por una intromisión tan brusea como impertinente de los hechos. « E por si muove »! ni sus brazos levantados al cielo ni sus gritos impedirán girar a la tierra.

La verdadera ciencia ignora este género de timideces; ella sabe enfrentar sin emocionarse las situaciones más imprevistas sin perder la sangre fría y la ecuanimidad!

Puesto que el Imperio de las Planicies ha existido y que no se puede negar que ha sido suficiente remover un poco las cenizas para hacer surgir innumerables testigos que proclaman elocuentemente sus grandezas pasadas, es necesario hacerle sitio y acostumbrarse a vivir en su compañía: nada borrará en adelante de los fastos de la Historia a esos pueblos, que se dice, no la han tenido. Quiérase o no, será necesario contar con ellos, escuchar lo que ellos tienen que decir, tomarlos en consideración y sacar las consecuencias. Más de 22.000 documentos arqueológicos esperan en el Museo de Santiago del Estero que nos dirijamos a ellos para pedirles sus secretos. No podríamos ni negar su existencia ni suprimirlos. Hablan en voz alta esos mudos testigos del pasado y prohíben a todos sin excepción que los desmientan. Sería en vano que se quisiera imponerles silencio.

Qué rutas han seguido a través del mundo esos mil y un símbolos que se han dado esa extraña cita en las llanuras santiagueñas? Quién será el investigador sagaz, el observador paciente y alerta que llegará un día a trazar sobre el mapamundo las Periples de las que ningún Hannon ha conservado el relato, los itinerarios de las Odiseas que ningún Homero ha cantado? Quién nos contará la historia de las Migraciones de los Símbolos, de los Exodos de los Pueblos que han hecho que nos sea permitido recojer al borde de un sendero perdido bajo las hierbas de la campaña santiagueña ese fértil disco de tierra cocida, esa fusaiola artísticamente trabajada que alguna morena hilandería de antaño fijaba al huso donde se enrollaba el algodón o la lana y que no podríamos distinguir, encerrada en la misma vitrina, de aquellas que forman parte de las colecciones de Schliemann?

Investigadores de vistas estrechas, obsesionados por ideas preconcebidas, nos dirán que todo lo que acabamos de exponer es pura fan-

tasía! Esas maravillas del arte cerámico que la mágica pátina de los siglos ha hecho venerables y que llevan tan visiblemente impreso el sello de las épocas lejanas de donde ellas vienen, los harán asegurar que son la obra de pobres gentes, tristes restos de una humanidad en decadencia que al decir de los cronistas de la Conquista, apenas ocultaban su sórdida desnudez bajo alguna piel de bestia, un taparrabo trenzado de paja grosera o algunas plumas de avestruz a guisa de cintura. No lo creáis: son esas opiniones tan pueriles que no merecen ser citadas ni menos discutidas.

Una visión más clara de las cosas es aquella que se ofrece a todo espíritu realmente preparado, digno de comprenderla. Sin ir tan lejos como el profesor Robert Hensenling de la Universidad de Berlín, que no ha hesitado en quemar sus naves y afirmar que las civilizaciones superiores del llamado Viejo Continente (Asia, África, Europa, incluyendo la China de los tiempos más remotos), no eran más que « Colonias » de una cultura primaria cuyo asiento principal se hallaba en el « Continente Americano », la Escuela de Santiago de Estero no se niega a encarar la hipótesis de una Atlántida de una envergadura muy distinta a la de Platón a la cual pertenecería una gran parte de América.

Ese inmenso territorio del que en épocas remotas deben haberse perdido grandes extensiones bajo las aguas, al modo de los campos de hielo que se funden con la aproximación de aguas más calientes y gradualmente se disuelven hasta desaparecer completamente, ha sido, todo nos induce a creerlo, la cuna de una gran Civilización Primordial, que sería en un momento dado esparcida por ondas sucesivas en toda la superficie de la tierra. Es de suponer que esas migraciones en escala, de las que sería imposible precisar ni la fecha ni el número, no fueran todas de igual importancia y que partidas en épocas distintas desde puntos a menudo alejados los unos de los otros, no se hayan dirigido todas en el mismo sentido. Así y solamente así, puede explicarse que hayan existido en regiones separadas unas de otras por distancias considerables centros de civilización cuya evolución no se haya operado *in situ* en los lugares en que se encuentran rastros de su presencia y que presentan entre ellas semejanzas asombrosas y diferencias también notables. Las semejanzas nos hablan de un primer origen común y las diferencias de cambios ya experimentados en el lugar de origen antes de la dispersión.

Supongamos para ilustrar mejor este punto, que hacia los comienzos de la Edad de Bronce, una parte de la Europa neolítica se haya sentido amenazada por la proximidad de alguna catástrofe, algún

nuevo diluvio o algún hundimiento de tierra. Los pueblos de esas regiones, para escapar a peligros reales o imaginarios, habrían abandonado unos tras otros la tierra natal, para buscar bajo otros cielos el abrigo de una nueva patria y todos en su fuga, no habrían partido, como es natural ni al mismo tiempo ni de los mismos puertos.

Y así se habrían formado esas colonias, que diseminadas por el mundo y aun después de haber pasado muchos siglos, presentarían los rasgos imborrables de un origen común. Pero cada colonia debió conservar ciertos detalles característicos de sus diferentes fundadores. Venidos del Norte, del Centro o del Mediodía, Escandinavos, Celtas, Iberos o Helenos además del patrimonio cultural que poseían en común, habían enriquecido sus fundaciones con el aporte de bienes particulares que les fueron propios y que servían para comunicar a cada uno de ellos una fisonomía distinta, pero siempre reconocible. Recordemos en este orden de ideas, Arles en Provenza que es aun en nuestros días un pedazo de tierra helena.

Las migraciones sucesivas de este género, partidas en tiempos remotos de una Atlántida de la que no hemos podido todavía penetrar el misterio, son las que nos permiten comprender el porqué de las correlaciones tan eminentemente sugestivas de que ligan las civilizaciones de los Mound-Builders y de los Indios Pueblos de la América del Norte a aquellas de la América Central y unas y otras a las de los constructores de tumulus de Santiago del Estero y de los antiguos habitantes de los valles Andinos de la Argentina y del Perú pre-incaico. Estas migraciones en «bancos de arenques» y en abanico, son igualmente la causa de que no debemos asombrarnos de que diferencias numerosas, fáciles de discernir, hayan conservado a cada una de estas diferentes culturas, salidas de un mismo centro común, una fisonomía propia, más o menos precisa, pero con la que sería imposible equivocarnos.

Es la lección, dijo al terminar el conferenciante, que recibimos del estudio objetivo y profundo de la Migración de los Símbolos, tan íntimamente ligadas a las antiguas razas humanas y a la historia de las civilizaciones primitivas. Ella nos permite seguir a través de todas las rutas del mundo, los signos misteriosos que los pueblos en marcha llevaban con ellos desde tierras lejanas de las que eran originarios y de donde habían partido. Hijos de la Gran Madre Común, la *Magna Mater*, que de un extremo al otro del mundo habitado ha dejado impresa la huella de sus pasos, son los iniciados en sus primeros misterios y han recibido de sus manos los símbolos venerados, que el tiempo, ese destructor que a menudo se muestra implacable, ha respetado piadosamente en muchos casos.

Sesión de comunicaciones científicas del 13 de Agosto de 1937

Bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester y ante una numerosa concurrencia de socios, profesores y estudiantes universitarios, se inició en una de las aulas de la Facultad de Química a las 18 una sesión de comunicaciones científicas, presentándose las comunicaciones que a continuación se publican:

LAS GRIETAS EN LOS SUELOS DE SANTIAGO DEL ESTERO

Por DAMASO LACHAGA

A fines del mes de Abril, del corriente año, llegaron noticias periódicas sobre la presencia de grietas que se habían producido en la superficie de la tierra en el Departamento Moreno de la Provincia de Santiago del Estero. A esta primera noticia siguieron otras que comunicaban la aparición de nuevas grietas dando datos concretos sobre extensión, profundidad y ancho de algunas, insinuando además que de proseguir el fenómeno los caminos y vías férreas sufrirían perjuicios importantes.

Como eran las primeras noticias que sobre estos fenómenos publicaban los diarios, parecía tratarse de un proceso extraordinario, y por ello éstos los vinculaban a manifestaciones volcánicas.

Aprovechando un viaje que realizaba por regiones vecinas, hice una rápida incursión en el departamento citado, tratando de fijar el carácter de los fenómenos. Interesaba fundamentalmente establecer si éstos, se desarrollaban de acuerdo a procesos tectónicos de exclusivo orden geológico o si entraban dentro del dominio de la edafología.

A priori ya tenía el concepto que el fenómeno entraba dentro de los procesos edáficos; pues en otros viajes había tenido oportunidad de encontrarme con grietas de menor importancia que la señalada por los diarios, las cuales presentaban claramente ese carácter. Estas las había observado en el Chaco santafecino en Diciembre de 1934, al comienzo de la lluvia de verano después de un invierno-primavera bastante seco. Las grietas se extendían sin rumbo preferido por algunos centenares de metros, eran en forma de cuña de unos 40 a 60 cm. en la base y terminaba a 1,50 metros más o menos de profundidad.

El corte producido por la grieta permitía distinguir los tres ho-

rizontes edáficos reconocidos regionalmente y las diferencias de textura de los materiales respectivos permitía claramente asignarle el carácter de grietas de contracción originadas en el horizonte B mostrando en la parte superior del mismo espejos de fricción que habían quedado como resultado de los distintos valores de contracción entre éste y el horizonte A que no lo había seguido en el movimiento.

De acuerdo a las constantes se podía establecer que la distinta contracción de los horizontes A y B permitían que mientras el horizonte B se contraía en superficies más o menos grandes, el A se estiraba sobre las grietas ayudado por las raíces para formar un techo a las mismas. Este se hundía con las lluvias haciendo aparecer la grieta, la que se mostraba como originada por las lluvias, en lugar de ser éstas solamente su factor de exteriorización.

Al tomar conocimiento personal de las grietas producidas en Santiago del Estero, noté que los perfiles de suelo descubiertos, no presentaban diferencias notables en la morfología de los distintos horizontes, perfectamente compatible con las condiciones de clima que rigen los procesos edáficos del Chaco santiagueño. Esta falta de material francamente distinto en el perfil del suelo parecía hacer que no se pudieran paralizar las conclusiones a que se había arribado para las grietas de Santa Fé respecto a las de Santiago del Estero. Las grietas en sí además se diferenciaban de éstas en que conservaban una dirección de conjunto preferida y eran de mayor importancia, pero se habían exteriorizado con un mismo mecanismo. Las observaciones se realizaron en tres grupos de grietas ubicadas unas entre las estaciones Aerolito y Miraval, que cortaban transversalmente el camino y la vía férrea, otras en Weisburd y por último en Tintina en el campo « El Milagro ».

De los informes recogidos de los pobladores resultaba que el fenómeno no se había realizado por excepción ese año, sino que es bastante normal y que existían muchos más grupos de grietas que las señaladas, distribuidas en el Chaco santiagueño y que este proceso solía repetirse a menudo en las condiciones actuales sin haber llamado mayormente la atención, debido a que no habían afectado caminos y a las condiciones especiales de vida del Chaco santiagueño.

Para relacionar las grietas respecto a los problemas de orden tectónico convenía echarle un vistazo a la geología regional, la que está basada exclusivamente en la interpretación de los perfiles obtenidos en las perforaciones realizadas para búsqueda de agua por la Dirección de Minas y Geología de la Nación. El número de perforaciones



ha sido suficiente como para poder haber llegado esa Dirección a resultados interesantes. Es interesante hacer notar que justamente en Alhuanpa, ubicada en el centro de esta área en la cual se encuentran las grietas estudiadas, se ha realizado la perforación hasta hace

poco más profunda del país y que había llegado hasta los esquistos cristalinos del basamento. Según esos estudios, el basamento cristalino está constituido por elementos del viejo escudo de « Brasilia », roto en una serie de bloques como resultado de las faces orogénicas pampeanas; resultando estos agrupados formando un conjunto de fosas y pilares. Como consecuencia de los empujes resultante de las distintas faces de la orogenia andina, los bloques sufrieron nuevos movimientos diferenciales conjuntamente con los sedimentos que en el ínterin se habían depositado sobre ellos, aprovechando las líneas de defectos estructurales preexistentes.

A estos movimientos diferenciales se los ha seguido, estudiando las posiciones relativas de los sedimentos reconocidos ya sean continentales o marinos desde la serie de Sao-Bentos (Paganzo superior) hasta el pampeano. El resultado de estos estudios permitieron establecer que los bloques se han movido siempre rejuveneciendo las líneas de defecto que separaban los primitivos bloques del basamento. Además estableció que el sistema de fallas profundas conservaban dos direcciones principales, una normal y otra paralela a las grandes líneas estructurales de las sierras pampeanas.

De acuerdo a este esquemático resumen de las condiciones geológicas de las comarcas en la cual se produjeron las grietas, era de esperar que si la dirección de éstas coincidieran con las supuestas para las fallas y se mostraran en partes tales donde se pudiera sospechar un rejuvenecimiento; se tendría un punto de apoyo para asignarle a las grietas un origen tectónico.

Estudiando los perfiles de Alluampa, Aerolito y Quimilí que fijan las condiciones del subsuelo profundo de la región en la cual están ubicados el primer y segundo grupo de grietas observadas, resulta que esta área está ubicada sobre un sólo block lo que alejaría la posible influencia de la tectónica en el origen de las grietas. Además las observaciones de campaña no establecen ningún desnivel sensible entre los labios de las grietas ya sean tomadas individualmente o en conjunto.

La dirección dominante de las grietas, coinciden con los rumbos submeridionales de los límites de los blocks; lo que trae alguna duda en la afirmación anterior.

Esta coincidencia entre ambas direcciones, no es sin embargo una razón concluyente, porque las grietas no se muestran en lugares donde podría sospecharse rejuvenecimientos de fallas. Más vale parecen ligadas con la morfología general de la llanura.

Las formas de relieve de toda la llanura que se extiende de Este

a Oeste del país hasta el sistema pampeano y también hasta los Andes son en esta latitud una serie de grandes bajos de dirección sub-meridional alterando con lomadas, presentando un dato interesante revelado por la observación de perfiles de perforaciones o condiciones de discontinuidad sísmicas que permiten sospechar una separación de bloques donde la topografía señala un gran bajo, por ejemplo (Iberá-Gualaguay), (Río Paraná), (Golondrina-Carrizales), (Los Porongos-San Antonio), etc.

De esta condición morfológica general de la llanura nace que la dirección de las lomadas coincida con las líneas de defecto estructural y de ahí resulta que si las grietas están vinculadas con los elementos morfológicos del relieve coincidiría en sus líneas generales con las direcciones de defecto estructural sin estar vinculadas directamente a ellas. Contribuye a descartar el carácter tectónico de las grietas la observación de campaña que éstas, en muchas partes aparecen por trechos más o menos largos cubiertas por un techo donde sólo por percusión se podía seguirla y conectarlas con otros tramos.

Puede por el conjunto de las observaciones realizadas desvincularse a las grietas de los problemas tectónicos apareciendo vinculada más directamente a los problemas del suelo. El origen en sí de las grietas parece distinto de las observadas en Santa Fé. Los datos de laboratorio correspondientes a determinaciones hechas para los dos únicos horizontes diferenciados en Weisburd los casi identifica en textura y comportamiento físico. Sólo persiste respecto a Santa Fé el mismo mecanismo para exteriorizarse, es decir mostrarse como hundimiento del techo como resultado de lluvias después de sequías relativamente intensas y prolongadas.

El proceso en sí de la formación de las grietas en Santiago del Estero no se habría producido por desecación distinta de dos horizontes en condiciones físicas iguales, y por ello no es posible aplicar directamente la hipótesis explicativa de las grietas de Santa Fé que se puede hacer manteniendo constante la humedad para los dos horizontes.

Hace falta investigar para Santiago del Estero la chance que hubiera para que los dos horizontes diferenciales pudieran estar en condiciones de humedad distinta como para que se pudiera obtener comportamientos distintos.

Las condiciones de relieve y climatológica de las comarcas en la cual se han producido las grietas, nos dan efectivamente los elementos necesarios.

Análisis mecánico

Criterio E.E. U.U.	350	351	864	865
Coloides	6,0	27,0	1,0	1,0
Arcilla	33,0	53,0	17,0	17,0
Limo	55,0	39,0	55,0	70,5
Arena fina	10,5	7,6	27,3	10,5
Arena gruesa	1,5	0,4	0,7	2,0
Gravas	0,0	0,0	0,0	0,0
Clasificación	Arcilla limosa	Arcilla	Limo	Limo

Constantes hídricas

Humedad equivalente de centrífuga .	28,80	45,30	22,9	21,85
Humedad equivalente de campaña . .	27,00	27,60	23,8	19,50
Relación de contracción (peso esp. aparente).	1,43	1,85	—	—
Límite líquido inferior	34,00	46,60	34,1	26,1
Índice de plasticidad	17,55	25,75	7,85	3,0
Límite de contracción	27,80	15,30	28,0	25,0
Clasificación	A-4	A-7	A-4	A-4

Determinaciones varias

Cloruros	Vestig.	Vestig.	Vestig.	Vestig.
Sulfatos	No cont.	No cont.	No cont.	No cont.
Ensayo de floculación	Dispersa	Dispersa	Dispersa	Dispersa

La posición de las grietas exclusivamente sobre áreas positivas de relieve elimina la posibilidad de que las lluvias puedan originar acumulaciones de agua en el suelo, tales como para permitir, con el régimen habitual de escasas lluvias que en cantidad y en número caen en la región, que ambos tengan una misma humedad; o resulte el horizonte inferior un proveedor. En estas áreas no existe además agua subterránea a una profundidad tal como para permitir un ascenso por capilaridad a los horizontes del suelo.

Las condiciones climatológicas de la región permiten en cambio un enriquecimiento en agua solamente en el horizonte superior, así vemos que por excepción el año pasado el verano fué seco con lluvia de 90 mm. entre Octubre y Febrero, cantidad tal que habiendo sido distribuida en 6 precipitaciones no pudo en las partes positivas del relieve haber alcanzado nada más que el horizonte superior. Además el clima del Chaco santiagueño es de tipo semi-desértico con altas

temperaturas diurnas y relativamente frías en horas de la noche, que hacen que la humedad relativa del aire llegue de 75 % al 90 %, ocasionando los consiguientes fenómenos de condensación en las capas superiores del suelo que están escasamente provistas de vegetación herbácea.

Establecida la posibilidad de que los dos horizontes puedan encontrarse en condiciones de desecación distinta el comportamiento de éstos a la contracción dará valores distintos como para justificar la presencia de techos en las grietas.

El mecanismo de la formación de la grieta sería que mientras el horizonte inferior se deseca continuamente el otro recibe tal cantidad de agua que le permite mantener su homogeneidad, ayudado en gran parte por las raíces de los arbustos del monte y mismo de los árboles que sólo por excepción penetran más de 40 cm. en el suelo.

LA LEY DE PRODUCCION DEL HELIO POR EL RADIO

Resultados obtenidos hasta el presente y nuevas experiencias

Por HORACIO DAMIANOVICH

Estudiando el comportamiento térmico del bromuro de radio ⁽¹⁾, después de dejar acumular el helio por éste emitido, en ampollita cerrada, durante dos años, pude comprobar: (a) que existe paralelismo entre la eliminación del helio por calefacción de la sal de radio y de sus derivados, y la descomposición térmica de los compuestos helio-platino; (b) que para eliminar totalmente el helio contenido en las sales de radio, se necesitan calefacciones más intensas y prolongadas, que las empleadas hasta ahora por Dewar y otros investigadores. Todo lo cual demuestra que el « helio activo » proveniente de la desintegración de las sales de radio, forma con éstas o con los productos de su evolución (RaA, RaC, RaD, Po, etc.) combinaciones químicas de diferente naturaleza y estabilidad, cuya descomposición es endotérmica, de acuerdo con lo señalado en mi primer trabajo a propósito del helio platino ⁽²⁾. Esto nos induce también, a admitir que los compuestos más estables son engendrados por los átomos de helio simple o doblemente ionizados (partículas α , He^+ y He^{++} , de los tubos

⁽¹⁾ H. Damianovich: *Inercia y actividad química de los gases raros*; VI. *Eliminación del helio por el compuesto platino-helio y por las sales de radio a diferentes temperaturas*. An. del Inst. Invest. Cient. y Téc., V, III y IV (1934).

⁽²⁾ H. Damianovich: *Inercia química de los gases raros*. An. Asoc. Quím. Arg., t. XVII (1929). Reunion Internationale de Chimie Physique, Octubre 1928.

de descargas) y los menos estables serán producidos por partículas de carga simple y de débil velocidad o por átomos de helio meta-estables.

Como Dewar, no eliminó todo el helio de la sal de radio antes de las acumulaciones, la cifra 170 mm³ gramo-año que Rutherford considera más aceptable que la por él obtenida (163), puede ser más elevada que la real. Además, el conjunto de todas las determinaciones hechas hasta el presente, muestra algunas discordancias notables y da en general valores menores que los deducidos de la actual teoría de la desintegración.

Por ello consideré conveniente prolongar los períodos de acumulaciones durante muchos años, determinando también el RaD, a fin de averiguar, si las cantidades de este radio elemento concuerdan con las previstas por la teoría, y si existe o no un descenso débil pero sistemático, atribuible a alguna impureza (compuestos HePt, HePo, etc.), arrastrada durante la preparación de las sales de radio. Pienso que estas investigaciones son muy necesarias por las razones expuestas y porque desde los primeros tiempos se ha atribuido todo el helio de los minerales a la desintegración del radio, basándose en la inercia química absoluta del helio y por consiguiente, en la imposibilidad de que este elemento se combine con algunos de los constituyentes de dichos minerales. Esta imposibilidad ha sido invocada hasta ahora por la mayoría de los investigadores que creen poder persistir en la afirmación de que el helio carece por completo de afinidad química. Pero ahora que existen pruebas evidentes en sentido contrario, pues hemos obtenido compuestos químicos estables HePt, HeFe, etc., o sea verdaderos « minerales sintéticos de helio », no es difícil aceptar que en la naturaleza existan muchos productos de origen no radioactivo con grandes cantidades de helio y cuyo comportamiento térmico, sea análogo al de los minerales radioactivos y al de los compuestos citados.

Las ingeniosas y prolijas investigaciones de Dewar, Rutherford, Debiérne, Daniz y de otros investigadores, han permitido dar un gran paso hacia la resolución definitiva del problema. Para completar este estudio sería conveniente emplear, antes de cada acumulación, calefacciones fuertes y prolongadas (hasta el agotamiento del helio previamente contenido en la sal de radio) y determinar a intervalos de tiempos de uno o más años, las cantidades de He, RaD, etc., engendradas. Este sería un complemento muy necesario, dado que en la teoría de la desintegración, partiendo de experiencias de duración máxima de diez meses, se ha extrapolado hasta más de veinte siglos.

Además, en lugar de emplear el término «oclusión», que carece en absoluto de significado científico y se le aplica para designar fenómenos de naturaleza muy distinta y cuyo mecanismo se desconoce, sería de gran interés investigar la naturaleza íntima de las asociaciones de los cuerpos radioactivos y de los constituyentes de los minerales, con el helio.

Considero también que es necesario tomar precauciones extremas en lo que se refiere a la presencia posible de helio y de hidrógeno en los cuerpos que se someten a la transmutación ⁽¹⁾, sobre todo en el caso de débiles recorridos de las partículas resultantes. En efecto se ha comprobado que ciertos gases como el hidrógeno, contenidos en los metales bajo forma de hidruros, combinaciones químicas de superficie, etc., cuando son eliminados por el calor u otros agentes físicos (radiaciones luminosas, etc) producen ionización. Estas advertencias ⁽²⁾ deben conducirnos a investigar por microanálisis las cantidades de gases (H, CO, N, He, etc.) contenidos en metales como Al, Mg, Li, Be, C, Pt, U, Th, etc., y a estudiar el efecto de la eliminación de estos gases sobre los fenómenos que se producen (emisión de partículas electrizadas con diferente velocidad) al someter al bombardeo moderado e intenso a dichos metales. Pero los resultados obtenidos así, como las determinaciones de helio y radioactividad en los minerales de helio y uranio (Antuita, Carnotita, Torianita, Pechblenda, Fergusonita, etc. y sus fracciones (gangas, residuos y precipitados después de ataques químicos, etc.) serán objeto de otro trabajo.

Sentadas estas ideas directrices, expongo a continuación el resultado de las investigaciones que he realizado con el objeto de contribuir a la revisión de la ley de producción del helio por el radio, dejando para otra oportunidad el examen detallado y discusión de los resultados obtenidos hasta el presente, así como la posibilidad de una radioquímica del helio y sus relaciones con el estado de este elemento en los minerales y con el proceso de transmutación.

Pero antes de pasar adelante quiero dejar constancia (y esto lo hago con íntima satisfacción) que estos resultados fueron expuestos ante la Société de Chimie Physique de France, en la sesión del 17 de Febrero de este año, bajo el título de «Chimie et Physico-chimie

(1) H. Damianovich: *La química del helio y la transmutación de los elementos*. Soc. Cient. Arg. (sección Santa Fé: Agosto 7, 1936). An. Soc. Cient. Arg., t. CXII, Diciembre 1936.

(2) H. Damianovich: *Inercia química de los gases raros*. An. Asoc. Quím. Arg., t. XIV, N° 76 y siguientes (1926-27).

de l'helium ». M. Jolliot, Presidente de dicha institución, se interesó mucho por estas investigaciones y en particular aceptó en forma decidida, mi proposición de que se llevaran a cabo nuevas determinaciones, poniendo en acumulación durante varios años, algunos decígramos de sales de radio y midiendo periódicamente (cada año por ejemplo) el helio producido. Mientras esto se lleve a cabo en el Institut du Radium, que dirige M. Debierne (quien también está de acuerdo con esto) yo enviaré el resultado de la nueva acumulación, que comenzó en Diciembre de 1936.

Las experiencias de descomposición térmica de los compuestos helioplantino ⁽¹⁾, demostraron que se necesitan fuertes y prolongadas calefacciones para eliminar las últimas porciones de helio de dicho « mineral sintético de helio », absolutamente libre de poros o cavidades como los invocados a propósito de los minerales radioactivos. En vista de ello y debido a que, como lo he dicho, en las experiencias de Dewar no se ha sometido la sal de radio a calefacciones intensas y prolongadas necesarias para eliminar todo el helio previamente acumulado, emprendí una experiencia preliminar (de calefacciones y acumulaciones sucesivas), que tuvo pleno éxito, dado que sólo se perdieron dos determinaciones de un conjunto de 19 calefacciones, durante un total de 108 horas a 450 grados, 26 horas a 670-700 grados y 78 horas a 800-850, recogién dose, en un año y siete meses menos de tres milímetros cúbicos y medio.

Esta acumulación preliminar de dos años (Abril 1930-1932), seguida de las calefacciones mencionadas, (Abril 1932-Noviembre 1933), permitieron como ya lo he dicho, demostrar (análogamente al caso del compuesto helioplantino) la endotermicidad de los compuestos que el helio forma con el radio y sus derivados y la necesidad de proceder a intensas y prolongadas calefacciones para eliminar el helio de dichos compuestos.

Haciendo las medidas de radioactividad con la colaboración de F. Urondo (método del cuarzo piezoeléctrico y etalon internacional de radio: rayos gama) y las medidas del volumen de helio por los métodos de calefacción y de disolución nítrica, se obtuvieron los resul-

(1) H. Damianovich: *El helio en los cuerpos radioactivos y no radioactivos: dificultad de su eliminación por el calor. Comunicación presentada a la Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fe), en la sección del 17 de Junio de 1932: An. del Inst. Inv. Cient. y Téc., V 3 y 4 (1934).*

tados contenidos en el cuadro adjunto que resume las medidas hechas hasta el presente por diferentes investigadores.

Producción de He por el radio

Nº	Tratamiento previo	Tiempo de acumulación	mm ³ de helio		Método	Investigador
			total	por gramo		
1	disolv.	3 meses	30	20	espectros.	Ramsay y Soddy (1903-4)
2	»		100	33	disolv.	Debierne (1905)
3				55	»	» (1909)
4	cal. 20 h. a 450	1000 h.		180-224	cal.	Dewar (1908)
5		275 d.		170	»	» (1909)
6	separación de Po y RaD	83 d.	6,52	150,5	»	Boltwood y Rutherford (1909)
7	separación de Po y RaD	132 d.	10,38	145	disolv.	Boltwood y Rutherford (1909)
8	800° 18 h.	218 d.	1,82	146	cal. 16 h. a 750	Damianov. (1936-7)
9	450° 23 h.	483 d. (acum. parciales)	3,41	122	cal. 1,3 h. a 650	» (1936-7)
10	transfor. del RaBr ₂ en Ra(NO ₃) ₂	210 d.	1,82	154	Disol en. No ₃ H dil.	» (1936-7)
11	disol. y evap.	210 d.	1,65	143	» »	» (1936-7)
12	Por determinac. de part. por Curie de emanación			148		Daniz (1913)
13	He en el Po			$\frac{1}{5}$ de la teoría		Boltwood y Rutherford (1909)
14	He en el Io			$\frac{1}{2}$ de la teoría		Boltwood (1911)

Como se ve, este conjunto de determinaciones muestra serias divergencias, sobre todo, entre las seis primeras. Las primeras medidas directas de volumen realizadas por Debierne dieron una discrepancia de alrededor del 40 % y resultaron muy bajas con respecto al valor deducido de la teoría de la desintegración. En cambio las

de Dewar son demasiado elevadas y dan diferencias extremas entre sí, de un 20 % aproximadamente. Las de Boltwood y Rutherford y la de Daniz dan un término medio de 147,8 con un error medio de 2 % y las muestras (descontando la de 12 con calefacción deficiente durante la extracción) dan un término medio de 147,6 con un error medio de un 4 %.

En vista de estos resultados y a pesar de haberse llegado a una concordancia satisfactoria en las determinaciones anteriormente examinadas, se hace imprescindible someter a una nueva revisión este importante problema, sobre todo, si tenemos en cuenta que existen grandes discrepancias en varios casos (Ra, Po, Io) entre la experiencia y la teoría. Para ello sería conveniente llevar a cabo un gran número de determinaciones, poniendo en acumulación durante varios años algunos decigramos de sales de radio y midiendo periódicamente el helio producido.

LA QUIMICA DEL HELIO Y ELEMENTOS ANALOGOS

Descomposición térmica de los compuestos Helio-Platino a altas presiones en atmósfera de Helio

Por H. DAMIANOVICH y J. PIAZZA

Con el fin de averiguar si se producía una fijación reversible de helio por los compuestos helio-platino sometidos una apreciable cantidad del producto obtenido catódicamente con la técnica habitual (que contenía 15,6 cm³ de helio por gramo) a variaciones de presión y de temperatura.

Técnica: Previos unos cálculos realizados con el objeto de hallar las dimensiones del dispositivo de descomposición más adecuadas para obtener una sensibilidad conveniente, adoptamos el siguiente aparato (fig. 1).

La esferita *A*, cuyo volumen es de 18,67 mm³, contiene 0,1046 g de platino-helio. Se tuvo la precaución de poner un taponcito de amianto en el vértice del capilar con el objeto de evitar la expulsión del producto hacia dicho capilar. Adoptando para el producto una densidad media de 17, el volumen ocupado es de 6,15 mm³. El volumen de helio en la esferita es entonces de 12,52 mm³.

El capilar *B* está calibrado, correspondiendo cada mm de longitud a 0,17 mm³, con un largo total de 150 mm hasta la soldadura. Se suelda el tubito al capilar *B* que está en comunicación con el

tubo *E*, el cual a su vez se halla unido al trasladador de mercurio *F* destinado a introducir el helio purificado. El depósito de carbón de coco *D* sirve para una ulterior purificación del helio. Se baja

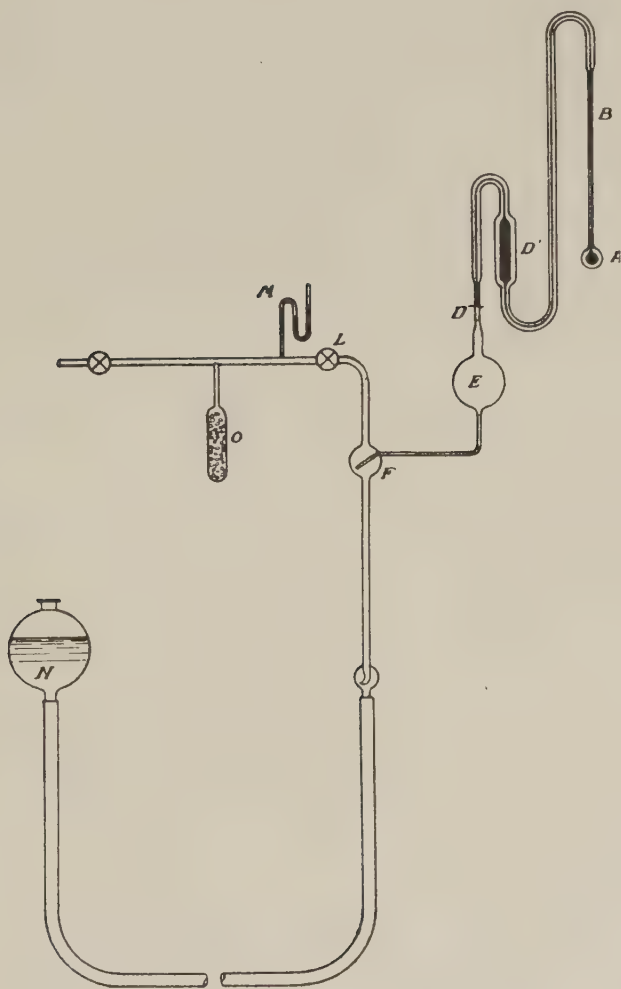


FIG. 1.

el nivel de mercurio *N* y se hace el vacío en todo el dispositivo al mismo tiempo que se expulsan los gases del carbón de coco contenido en el bulbo *O*, calentándolo a 400° con un hornito.

Se deja enfriar, se coloca aire líquido en el bulbo *O* y se introduce el helio hasta una presión de 20 mm que es la más conveniente para el llenado del bulbo *E* y del resto del aparato. Una vez cerrada la

llave *L* se comprime el helio subiendo el nivel *N* del mercurio hasta que el mismo, después de llenar el bulbo *E*, penetre en el depósito



FIG. 2.

D hasta llenarlo. La operación es satisfactoria cuando los niveles del depósito *N* y del bulbo *L'* están a la misma altura. Cuando esto no

sucede hay que volver a operar con otras presiones. Una vez hecho éste, se corta el capilar en *D* quedando todo listo para adaptarlo al compresor Altachul como lo muestra la fotografía Fig. 2. Después de unir con mastie apropiado el extremo *D* al compresor de aceite se adapta un baño de aceite de vaselina y una regla milimétrica al sistema de la esferita con capilar ya descripto. Dado este sencillo y sólido dispositivo pudimos operar con facilidad, llegando a presiones superiores a 40 atmósferas.

RESULTADOS OBTENIDOS

Los ensayos con el objeto de avireguar si había fijación o desarrollo de helio en la fase sólida a la temperatura ordinaria (20°) y a presiones de 9 atmósferas, dieron resultados negativos. Esta ausencia de fijación de helio por el compuesto helio-platino concuerda con lo ya observado en otra oportunidad a la presión ordinaria y a la temperatura del aire líquido (¹).

En estos primeros ensayos y con el fin de explorar el comportamiento del compuesto de punto de descomposición de 95° aproximadamente, llevamos la temperatura a 110° .

El cuadro adjunto y el gráfico fig. 3, resumen las medidas efectuadas.

Por el examen del mismo se comprueban los siguientes hechos:

- 1) A una presión de 14 atmósferas y 90° en los primeros 5 minutos, el desarrollo de helio es débil.
- 2) Aumentando a 25 atm. y 115° , éste desprendimiento de helio se acentúa.
- 3) Manteniendo el producto en esta isotérmica de 115° durante 30 minutos, se nota un desprendimiento máximo de $3,6 \text{ cm}^3$.
- 4) Siguiendo media hora más a esta temperatura, el desarrollo es insignificante.
- 5) Un aumento de temperatura que alcanzó un máximo de 150° y duró 30 minutos para descender a 115° (temperatura de la isotérmica anterior) y una presión máxima de 42 atmósferas, determinaron un desarrollo de sólo $0,5 \text{ cm}^3$ de helio.
- 6) A 110° y entre 30 y 40 atmósferas, el producto resultante de esta primera descomposición (horizontalidad de la curva: velocidad nula) no fija helio a pesar de las variaciones bruscas de presión hasta 10 atmósferas.

(1) H. Damianovich y J. Piazza: An. del Inst. de Inv. Cient. y Téc., Vol. 1, pág. 47, 1932.

CUADRO N° 1

<i>z</i>	—	—	—	1	5	5,5	6
<i>p</i>	9	10	10	13	14	17	18
<i>t</i>	14	25	78	81	90	111	114
<i>v</i>	0	0	0,10	0,21	0,21	0,33	0,70
<i>z</i>	6,5	8	10	10	13	14	16
<i>p</i>	18	20	22	22	25	25	25
<i>t</i>	115	117	117	114	117	115	116
<i>v</i>	1,10	1,69	2,0	2,29	2,54	2,68	2,78
<i>z</i>	17	18	20	22	25	27	30
<i>p</i>	25	27,7	28	28	29	30	30,5
<i>t</i>	116	115	111	113	115	115	116
<i>v</i>	2,92	3,07	3,22	3,22	3,31	3,50	3,64
<i>z</i>	31	32	34	37	38	43	46
<i>p</i>	35	31	31	31,5	36	32	31
<i>t</i>	114	115	118	123	123	124	120
<i>v</i>	3,70	3,73	3,64	3,68	3,73	3,73	3,64
<i>z</i>	46	53	63	63	65	66	68
<i>p</i>	35,9	30	30,2	35	31	33	34
<i>t</i>	120	115	110	113	120	125	131
<i>v</i>	3,73	3,54	3,68	3,50	3,60	3,92	4,0
<i>z</i>	69	70	72	78	78	90	95
<i>p</i>	35	37	42	36	41,5	34	33
<i>t</i>	140	150	146	140	140	124	116
<i>v</i>	4,05	4,20	4,30	4,20	4,30	4,15	4,05
<i>z</i>	95	97	97	120	150	—	—
<i>p</i>	38	32,1	37	28	26	—	—
<i>t</i>	115	107	106	20	20	—	—
<i>v</i>	4,10	4,05	4,10	4,05	—	—	—

z corresponde al tiempo en minutos; *p* corresponde a la presión en atmósferas; *t* corresponde a la temperatura; *v* corresponde al volumen. (cm³, gramo).

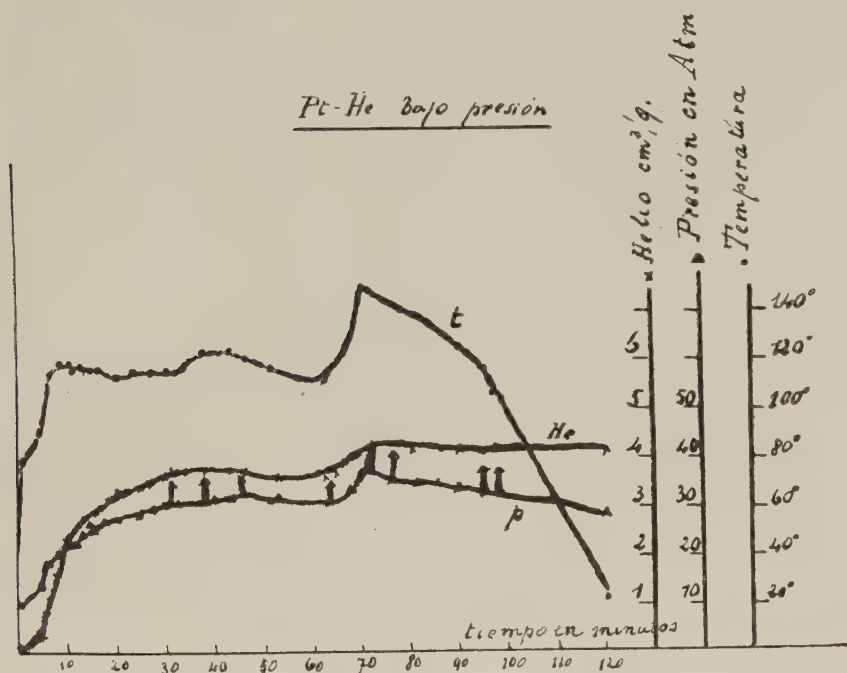


FIG. 3.

INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

El simple examen de los resultados hasta ahora obtenidos muestra que el comportamiento térmico general de este producto es análogo al de los estudiados anteriormente en cuanto a la temperatura de descomposición de este primer producto (90-100°).

El hecho de que la presión no influye sensiblemente sobre el proceso, por lo menos hasta las presiones de 42 atmósferas, indicaría que en estas condiciones el proceso es casi en su totalidad irreversible.

Este hecho, al demostrar la no reversibilidad, nos lleva a admitir que el producto resultante de la combinación del helio con el platino no admite la fijación de otra cantidad de helio no activado eléctricamente. Es decir que no tendría lugar una absorción reversible ni una adsorción de la que se ha convenido en denominar «adsorción no activada», como la que se observa en el sistema carbono-gas (H_2, N_2, O_2).

Con el fin de averiguar si un acercamiento mayor de las moléculas complejas del metal y los átomos de helio hasta que puedan en-

trar en juego las fuerzas de valencia de diferente categoría, llevaremos a cabo investigaciones experimentales a presiones mucho más elevadas que las utilizadas en estas experiencias.

Para llegar a una interpretación más completa necesitamos estudiar el comportamiento del compuesto ⁽¹⁾ cuya temperatura de descomposición es de 300°, sometiéndolo también a la acción de las hiperpresiones.

CONCLUSIONES

1. — Las presiones hasta 42 atmósferas no provocan en el compuesto helio-platino (de temperatura de descomposición de 90°-100°) en descomposición isotérmica de 110°, variaciones apreciables en el comportamiento térmico general.

2. — No se observa tampoco reversibilidad del proceso a estas presiones y a la temperatura indicada.

3. — El helio con el platino, sometidos a una presión de 42 atm. y a una temperatura de 110°, no se combinan como sucede en la activación catódica de ambos elementos.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
CIENTÍFICAS Y TECNOLÓGICAS - FACULTA DE
QUÍMICA INDUSTRIAL Y AGRÍCOLA
UNIVERSIDAD DEL LITORAL

HELIO Y RADIOACTIVIDAD EN LOS MINERALES DE URANIO

I. — Autunita y sus fracciones

Por HORACIO DAMIANOVICH y FRANCISCO URONDO

Hemos tenido ocasión de mostrar ⁽²⁾ que el problema del estado de los llamados elementos inertes en los minerales, se halla aun en su fase inicial a pesar de las experiencias realizadas hasta el presente, por Gautier, Tilden, Strutt (Rayleigh), Wood, Lepape y otros investigadores, y que podíamos suponer la existencia de asociaciones moleculares y de verdaderas combinaciones químicas de estos elementos con los constituyentes de dichos minerales. Para resolver este importante problema, proponíamos someter a un frac-

⁽¹⁾ Damianovich y Piazza: Anales del Inst. Inv. Cient. Técn., tomos V-VI, pág. 54.

⁽²⁾ H. Damianovich: *Inercia química de los gases raros*. An. Asoc. Quím. Arg. t. XIV, N° 78, 1927 27.

cionamiento sistemático los principales minerales que contienen helio y argón (hasta entonces no realizado) y estudiar las características físicas y químicas de cada una de las fracciones aisladas y en particular el efecto de la temperatura sobre los heliuros y argonuros que pudieran existir en algunas de ellas.

Posteriormente ⁽¹⁾ a la vez que pudimos comprobar en el caso de la autunita de acuerdo con Piuti, que la ganga obtenida después del ataque con ácido clorhídrico, contiene cantidades apreciables de helio, anunciábamos este trabajo de colaboración emprendido con el objeto de relacionar los datos relativos al helio (Damianovich) con los suministrados por las medidas de radioactividad (Urondo).

En lo que se refiere al helio de la autunita (fosfato doble de uranio y de calcio) no se tienen más datos que las determinaciones cualitativas de Soddy ⁽²⁾, de Piuti ⁽³⁾ y de Bordas. Además de la observación anterior, Piuti creyó poder concluir que la autunita contenía tanto menos helio cuanto más pura era, conclusión que Mme. Gleditsch objetó debido a que ella se basaba en pocas observaciones. Bordas no halló helio en la autunita.

En cuanto a las medidas radioactivas sólo existen los datos de Marckwald y Russell ⁽⁴⁾, quienes hallan cifras bajas para la relación $\frac{\text{Ra}}{\text{U}}$ en autonitas de Francia y de Portugal. Soddy y Pirret ⁽⁵⁾ observan anomalías análogas, es decir, 0,24 a 0,74 para dicha relación cuando se toma como unidad la relación correspondiente a la Pechblenda. Mme. Gleditsch ⁽⁶⁾ llega a resultados análogos.

En lo que sigue haremos una síntesis de los resultados obtenidos empleando las técnicas habituales de dosificación del helio y de medidas de radioactividad.

Primeramente hicimos la separación mecánica de una autunita de Tonkin granulosa, obteniendo 5,8 mm³ de helio por gramo en la

(1) H. Damianovich: *La química del helio y la transmutación de los elementos*. Comunic. a la Soc. Cient. Arg. (Sec. Santa Fe), Agosto 1936, y An., t. CXXII, Diciembre 1936.

(2) F. Soddy: *Le Radium*, t. 7; Agosto 1910.

(3) Piuti: *Le Radium*, t. 8, pp. 13-44 (1911).

(4) Marckwald y Russell: *Chem News*. 103; 277-78 (1911); *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellschaft*.

(5) Soddy y Pirret: *Phil. Mag.* 21 (1911).

(6) Gleditsch: *Le Radium*, t. 8 (1911).

ganga cuarzosa y sólo $2,25 \text{ mm}^3$ de helio por gramo en la porción constituida por los cristales de la fracción uránica. En cambio la ganga de aspecto arcilloso obtenida por filtración de la suspensión resultante del ataque del mineral por el ácido nítrico en caliente y al 50 %, dió en dos determinaciones 6,76 y $7,39 \text{ mm}^3$ de helio por gramo.

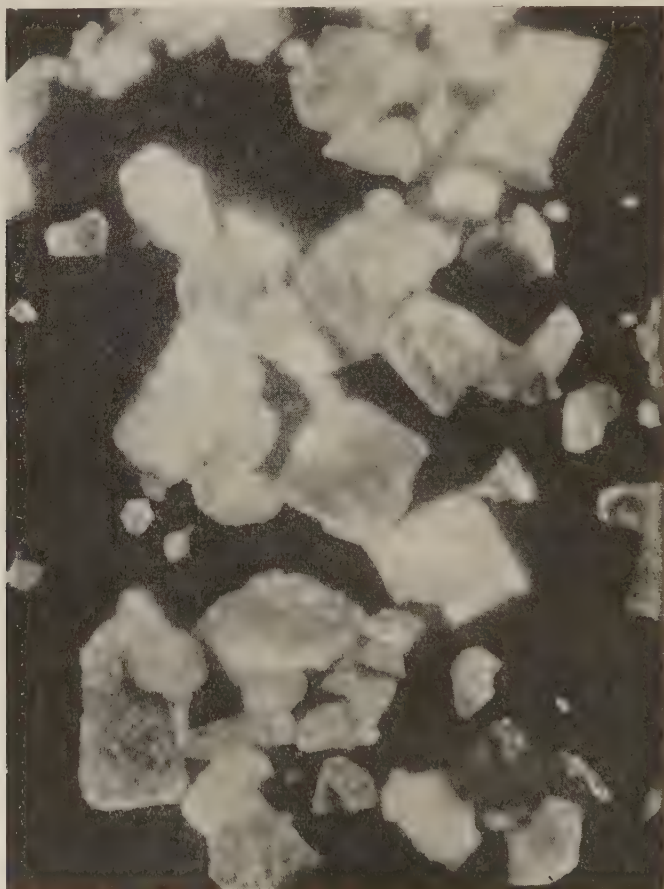


Fig. 1. — Conjunto de cristales, primera fracción.

En vista de estos primeros resultados que demostraban que la ganga arcillosa casi completamente desprovista de uranio (pequeñísimas cantidades de sal soluble de uranio arrastradas por absorción) contenía alrededor de tres veces más helio que la fracción uránica cristalizada, procedimos a un fraccionamiento del mineral pulveri-

zado, (con la ayuda del señor R. Méndez que consistía en agitar el conjunto en suspensión acuosa dejando decantar unos instantes la parte uránica cristalizada conjuntamente con la ganga cuarzosa (fracción nº 1) y después, sucesivamente las suspensiones de más en más finas (fracciones nºs 2, 3, 4, 5, 6). La dosificación del helio

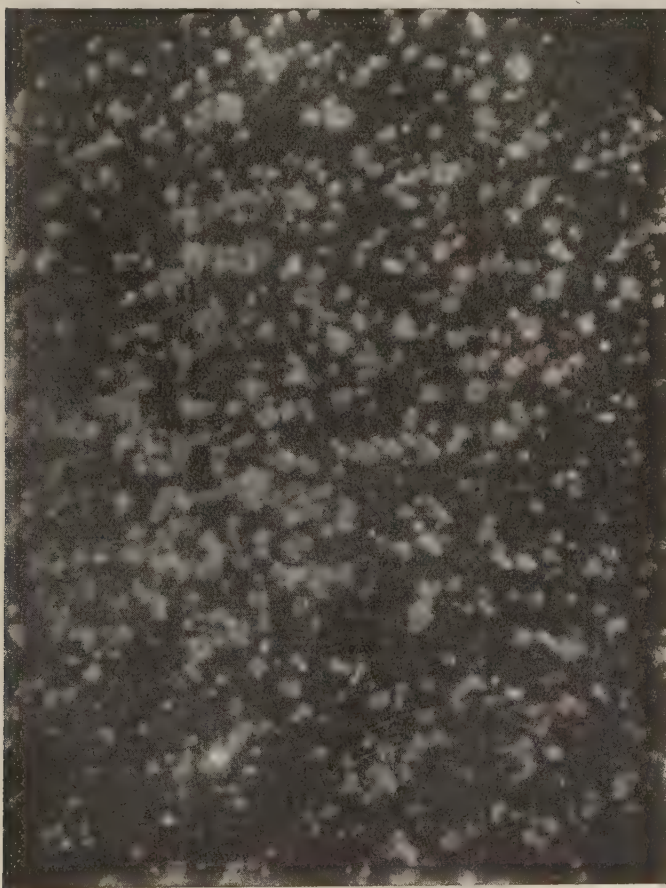


FIG. 2. — Segunda fracción.

dió el siguiente resultado expresado en mm^3 de este gas por gramo de producto :

1ª fracción. — 1,73	5ª fracción. — 5,4
2ª » . — 3,08	6ª » . — 7,9
3ª » . — 2,9	

Las microfotografías (50 diámetros) representadas por las figuras 1, 2 y 3, corresponden respectivamente, la primera a cristales grandes y chicos de la fracción uránica y las dos últimas, a la segunda y cuarta fracciones. Como se observa en ellas, los cristales de



FIG. 3. — Cuarta fracción.

la segunda fracción son mucho más chicos que los de la primera y los de la cuarta de menor tamaño aún que los de la segunda. Los cristales de la sexta fracción son los más pequeños de todos.

Con esto hemos conseguido el fin que nos proponíamos, esto es, demostrar que las fracciones de la ganga que provisoriamente hemos llamado arcillosa con cantidades de helio hasta tres veces mayores

que la de las fracciones uránicas, tienen un aspecto microscópico totalmente distinto del de estas últimas, pero para completar este estudio, determinaremos la composición química, la microestructura (por rayos X), el desprendimiento de helio en función de la temperatura y del tiempo, etc.

Un nuevo fraccionamiento obtenido agitando con agua el mineral pulverizado (agitación uniforme durante diez segundos) y dejando depositar durante tiempos cada vez mayores, dió el siguiente resultado:

1ª fracción . . .	Depósito después de agitar . . .	0,38 mm ³ de helio × gramo
2ª » . . .	» » un minuto de reposo de la suspensión resultante de la primera fracción .	2,50 » » »
3ª » . . .	Depósito después de agitar 10 segundos el decantado de la segunda fracción y de reposar 4 minutos	0,60 » » »
4ª » . . .	Depósito después de agitar 10 segundos el decantado de la tercera fracción y de reposar 10 minutos	6,60 » » »
5ª » . . .	Depósito después de agitar 10 segundos el decantado de la cuarta fracción y de reposar 20 minutos	2,50 » » »
6ª » . . .	Sólido retenido en el filtro después de la suspensión resultante de la quinta fracción.	1,78 » » »

En general todas estas fracciones son más pobres en helio que las anteriores, debido en gran parte a que estuvieron a 60 grados durante 4 días. Vuelve a repetirse el hecho notable de que todas las fracciones « arcillosas » contienen más helio que la fracción más rica en uranio (1ª fracción). Debido a las diferencias en el contenido de helio en las distintas fracciones, nos proponemos hacer un fraccionamiento más riguroso por centrifugación y otros medios apropiados.

Se ha determinado el contenido en radón de las diversas soluciones, estableciendo las corrientes de ionización en una cámara para gases y siguiendo el método clásico del cuarzo piezoeléctrico por compensación (constante del cuarzo 8,3 u. e. e. por kilogramo de tracción).

En el cuadro siguiente figuran los valores de esas corrientes de ionización por gramo y segundo, calculadas para un tiempo de acumulación infinito. Comparando con un etalón de radio esas magnitudes corresponden a cantidades del orden 10^{-7} gramos de radio.

Autunita de Tonkin

Tiempo de acumulación del radón	$\dot{\epsilon}$ u. e. e. seg/gr
<i>Tratamiento químico (NO₂H)</i>	
a) Parte uránica	
2 días 15,5 hs.	0,20733
1 día 23,25 hs.	0,31313
2 días 0,75 hs.	0,30837
2 días 0,83 hs.	0,29498
2 días 14 hs.	0,29146
b) Ganga arcillosa	
2 días	3,16620
2 días	2,95249
2 días 0,5 hs.	3,24347
1 día 23,42 hs.	2,48114
2 días 0,75 hs.	2,94089
22,15 hs.	3,00490
c) Ganga cuarzosa	
2 días 5,33 hs.	0,00235
2 días 0,17 hs.	0,00508
2 días 22 hs.	0,00482
3 días 19,83 hs.	0,00119
<i>Tratamiento químico (HCl)</i>	
a) Parte uránica	
2 días 0,91 hs.	0,20718
2 días 7,17 hs.	0,37153
2 días 16,58 hs.	0,32378
<i>Separación mecánica</i>	
a) Parte uránica	
2 días 2,67 hs.	0,28048
2 días 2,3 hs.	0,26287
1 día 20,83 hs.	0,24088
2 días 13,25 hs.	0,33610
b) Ganga	
2 días 16,83 hs.	0,05397
3 días 0,33 hs.	0,01473
1 día 19,08 hs.	0,03636

Del simple examen de este cuadro resalta inmediatamente la mayor radioactividad de lo que hemos llamado ganga arcillosa con respecto a la parte uránica obtenida por disolución en ácido nítrico o en ácido clorhídrico. A su vez la radioactividad de la ganga cuarzosa obtenida por separación mecánica tiene una radioactividad muy inferior a la de la fracción uránica pero bastante superior a la de la ganga cuarzosa obtenida por separación química (ácido nítrico). El ácido nítrico actúa disolviendo la substancia radioactiva contenida en la ganga obtenida por separación mecánica.

Comparando con los datos numéricos relativos al contenido en helio, se comprueba en parte la existencia de un importante paralelismo, pues la ganga arcillosa contiene bastante más helio que la fracción uránica, aunque la diferencia no es tan grande como en el caso de la radioactividad. Por otra parte, la ganga cuarzosa obtenida por separación mecánica, también dió más helio que la fracción uránica, esto es, lo inverso de lo que se observa con respecto a la radioactividad.

Proseguimos las investigaciones con el objeto de averiguar si existe alguna relación entre el contenido de helio en las fracciones obtenidas mecánicamente en la forma descripta, y la radioactividad de las mismas.

Los resultados hasta ahora obtenidos, como se ve, confirman las conclusiones de Piuti. Ellos demuestran también que es indispensable proseguir en forma sistemática para resolver definitivamente los importantes problemas concernientes a las relaciones entre el helio y la radioactividad de los minerales de uranio y a la naturaleza de los compuestos que este elemento llamado inerte puede formar con algunos de los constituyentes de los mismos.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
CIENTÍFICAS Y TECNOLÓGICAS - FACULTAD DE
QUÍMICA INDUSTRIAL Y AGRÍCOLA
UNIVERSIDAD DEL LITORAL

NUEVO MOTOR TERMICO

Por JOSE PIAZZA

En esta comunicación que aparecerá íntegramente en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, el autor describe y desarrolla la interpretación teórica de un nuevo motor térmico, que funciona con vapor de mercurio.

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

(Continuación *)

Ejemplo 2:

Con el mismo procedimiento ha sido obtenida la cadena

$$C_5(7, n) = \{12345\} \{12347\} \{12356\} \{12367\} \{12456\} \{12467\} \{13456\} \{13467\} \{23456\} \{23467\},$$

que en el E_5 corresponde al politopo convexo representado en el ejemplo 2 del número 20.

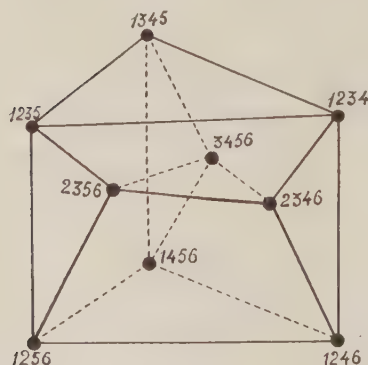
Ejemplo 3:

He aquí otras dos cadenas:

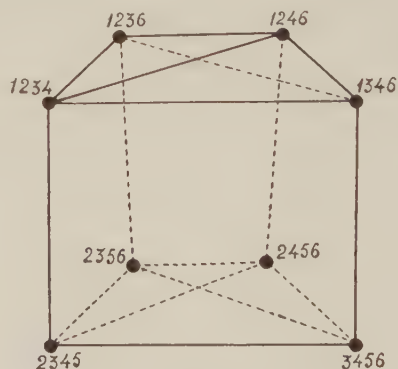
$$C_4(6, n) = \{1234\} \{1235\} \{1246\} \{1345\} \{2346\} \{1256\} \{2356\} \{1456\} \{3456\},$$

$$C'_4(6, n) = \{1234\} \{1236\} \{1246\} \{1346\} \{2345\} \{2356\} \{2456\} \{3456\},$$

que en el E_4 corresponden a los dos politopos siguientes:



$C_4(6, 4)$



$C'_4(6, 4)$

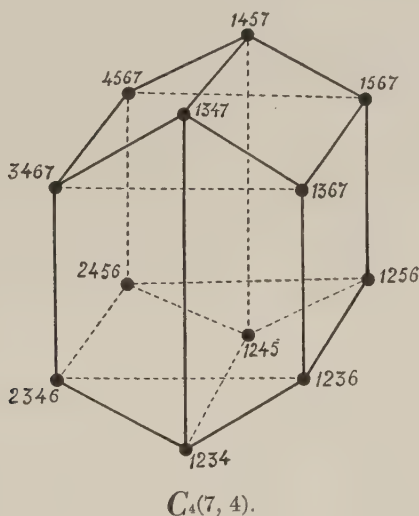
(*) Véase pág. 157, Entrega III, Tomo CXXIV, Septiembre 1937.

Ejemplo 4:

La cadena

$$C_4(7, n) = \{1234\} \{1236\} \{1245\} \{1347\} \{2346\} \{1256\} \\ \{1367\} \{1457\} \{2456\} \{3467\} \{1567\} \{4567\},$$

para $n = 4$, corresponde a politopos heptaédricos tetradimensionales como el de la figura:



En definitiva, se tiene la siguiente regla:

VI) Para formar todas las cadenas cerradas de dada clase m y dado orden h , se enumeran arbitrariamente las m filas de toda matriz del tipo dado; se forman, con estas filas, los $\binom{m}{h}$ determinantes de orden h y todos sus orlados; se fija, a voluntad, una permanencia P_h y cada una de sus h permanencias conjugadas, P_h^i ; se repite esta elección partiendo sucesivamente de cada una de las permanencias P_h^i , hasta que sea posible. El conjunto de permanencias así obtenido es, (25), una cadena cerrada. Operando de este modo se obtienen todas las cadenas cerradas de clase m y orden h .

OBS.. Nótese que, de la cadena, es fácil obtener inmediatamente la forma de una cara de la figura correspondiente; basta considerar una fila y todas las permanencias a las cuales dicha fila pertenece.

Así, en el ejemplo 4, la cara 1 está dada por el hexaedro tridimensional cuyos vértices son:

$$\{1234\}; \{1236\}; \{1256\}; \{1567\}; \{1457\}; \{1347\}; \{1367\}; \{1245\}.$$

La cara 2 está formada por el pentaedro tridimensional de vértices:

$$\{1234\}; \{1236\}; \{1256\}; \{2456\}; \{2346\}; \{1245\}.$$

Teniendo todos sus elementos, la representación geométrica de la figura perteneciente a una dada cadena, es una cuestión muy simple como prueban los ejemplos precedentes. Puede suceder que a cadenas distintas correspondan figuras de *igual forma* poliédrica convexa. Más adelante enseñaremos a comparar las cadenas entre sí y nos ocuparemos de esa cuestión, definiendo previamente qué debe entenderse por *figuras poliédricas convexas de igual forma*.

Composición de cadenas. — Es posible definir, con las cadenas de permanencias, dos operaciones fundamentales, a saber. la *agregación* y la *sustitución*. Mediante la combinación de un número finito de estas dos operaciones, toda cadena prefijada de permanencias se podrá deducir partiendo de una cadena elemental del mismo orden que la dada.

27. AGREGACIÓN. Sea $C_h(m, n)$, una cadena de orden $h > 0$, toda cadena elemental de igual orden, h , que tenga una permanencia común con $C_h(m, n)$ y una dada fila a no perteneciente a ésta, se dirá una *cadena elemental separada de $C_h(m, n)$ por la fila a* .

I) Si $C_h(m, n)$ es una cadena de orden $h > 0$, la cadena elemental de orden h , formada por las h filas de una permanencia de $C_h(m, n)$ y una dada fila no perteneciente a $C_h(m, n)$, es una *cadena elemental separada de $C_h(m, n)$* ; puesto que la cadena elemental así formada cumple la definición.

II) El conjunto de permanencias no comunes a una cadena $C_h(m, n)$, de clase m y orden $h > 1$ y a toda cadena elemental separada de ella, constituye una nueva cadena, $C'_h(m', n)$, del mismo orden, h , de la dada y de clase $m' = m + 1$.

En efecto, sean

$$1, 2, 3, \dots, h, \dots, i, \dots, m,$$

las filas de la cadena $C_h(m, n)$; $\{1\ 2\ 3 \dots h\}$, la permanencia común a $C_h(m, n)$ y a su cadena elemental separada, y a la fila de esta última no perteneciente a la sucesión precedente, es decir, $i \neq a$.

Consideremos el conjunto de las permanencias de $C_h(m, n)$ y de las $h + 1$, (26, IV), permanencias de la dada cadena elemental separada. En dicho conjunto es posible determinar la fila a de modo que formen cadena todas las permanencias excepto la primera, pues basta considerar cualquier sistema $S_h(m, n)$, correspondiente, (24, III), a

la cadena $C_h(m, n)$, dada y elegir el hiperplano relativo a la fila a , de modo que el vértice de la región de $S_h(m, n)$, determinado por la primera permanencia, esté en distinto semi-espacio con respecto al hiperplano a , que los determinados por todos los demás. Esto es posible, y de infinitos modos, en virtud de la convexidad, (4, IX). El nuevo sistema, es, pues, también compatible, luego (24, III), dichas permanencias forman cadena.

La permanencia común, $\{123 \dots h\}$, no puede ser permanencia en el conjunto considerado porque en la primera columna los determinantes orlados $(123 \dots (h-1) h a)$ y $(123 \dots (h-1) h i)$ tienen signo opuesto como resulta inmediatamente del cuadro siguiente:

$123 \dots (h-1)h$	$123 \dots (h-1) a \varepsilon$	$123 \dots (h-1) i \varepsilon'$
$123 \dots (h-1) h a \varepsilon'$	$123 \dots (h-1) a h$	$123 \dots (h-1) i h$
$123 \dots (h-1) h i \varepsilon$	$123 \dots (h-1) a i$	$123 \dots (h-1) i a$
.....		
.....		
$133 \dots (h-1) h m$	$123 \dots (h-1) a m$	$123 \dots (h-1) i m$

La primera parte del teorema vale también para el caso $h = 1$, es decir, para una cadena unitaria, pero no vale la segunda parte, como es fácil verlo. La clase de la cadena unitaria queda inalterada y la operación se reduce, en este caso, a una simple sustitución de una fila por otra.

El teorema precedente permite, pues, *agregar* a una cadena, una nueva fila extraña a ella formando, de ese modo, otra cadena de igual orden que la dada y de clase aumentada en una unidad.

La operación que consiste en agregar una nueva fila a una cadena $C_h(m, n)$, cerrada o abierta, de orden $h > 1$, se llamará *agregación*.

Prácticamente, esta operación puede disponerse como se indica en el siguiente

Ejemplo 1:

Sea la cadena $C_3(6, n)$ del ejemplo 1 del número (26) a la cual queremos agregar la fila 7. Escribiremos:

$$C_3(6, n) = \{123\} \{124\} \{135\} \{145\} \{236\} \{245\} \{256\} \{356\}.$$

$$C'_3(4, n) = \{123\} \{127\} \{137\} \{237\}.$$

Resulta así la cadena:

$$C''_3(7,n) = \{124\} \{135\} \{145\} \{236\} \{245\} \{256\} \{356\} \{127\} \{137\} \{237\}.$$

Las permanencias escritas en bastardilla son las suprimidas.

En lo sucesivo indicaremos en bastardilla las permanencias suprimidas.

Es claro que la agregación puede ser hecha de tantos modos como permanencias tenga la cadena dada.

En particular, aplicándola sucesivamente a una cadena elemental, se obtienen cadenas cuyo orden y cuya clase pueden ser pre-fijadas a voluntad.

El concepto de cadena elemental separada de otra y el teorema que precede son susceptibles de una fácil generalización.

Dada una cadena C_h , de orden $h > 0$, toda cadena cerrada C'_h , de igual orden h , formada por filas de C_h y por una fila, a , extraña a ella, de tal modo que todas las permanencias de C'_h que no contienen a la nueva fila a pertenezcan a C_h , se dirá una *cadena separada de C_h por la dada fila a* , o simplemente, *cadena separada de C_h* .

III) *El conjunto de permanencias no comunes a una cadena C_h y a toda cadena C_h , separada de ella, constituye una cadena de permanencias, C'_h , llamada cadena resultante. Si el orden de C_h es mayor que uno y toda fila de las permanencias comunes a ésta y a su cadena separada, figura también entre las permanencias no comunes, la clase de la cadena resultante supera en una unidad a la clase de C_h .*

La primera parte, se demuestra exactamente como el (II). En cuanto a la segunda, es inmediata; pues la nueva cadena, por contener a la fila agregada resulta con $m + 1$ filas. Si no se impone la condición de ser $h > 1$ y de que toda fila figure entre las permanencias no comunes, la cadena *resultante* podría tener clase *mayor, menor o igual* que la de la cadena dada.

Dada la importancia de este teorema, que comprende, como caso particular, al (II), daremos una demostración general de él, independiente de consideraciones geométricas. Bastará probar, (24), que, en la nueva matriz, el conjunto Γ , de permanencias no comunes a C_h y a C'_h , toda permanencia de Γ , tiene una conjugada en Γ . Sea, entonces, P una permanencia de este conjunto. Pertenece, por lo tanto, a una sola de las cadenas dadas y tiene en ella una conjugada, P' . Si también P' pertenece al conjunto Γ , y esta eventualidad se presenta para todas las permanencias de Γ , el teorema está demostrado. Si P' no pertenece a Γ , para $h < 1$, tiene (23), P' , $h - 1$ filas comunes con P . Esta hipótesis implica, por otra parte, que P' pertenece a am-

bas cadenas. Puesto que C'_h es cerrada, existe en ella, (25), la conjugada P'' , que tiene con P' , esas mismas $h - 1$ filas comunes. Luego, las permanencias P , P' y P'' , tienen dichas $h - 1$ filas comunes. En consecuencia, P' y P'' no pueden ser comunes a ambas cadenas, de lo contrario, una de ellas tendría tres permanencias con $h - 1$ filas comunes, lo cual es imposible, (22, II). Por lo tanto, P'' pertenece también a Γ . Razonando de este modo con cada permanencia de Γ , resulta probada la proposición.

Para el caso $h = 1$, es inmediata.

En cuanto a la segunda parte, es inmediata también, puesto que siendo $h > 1$, queda agregada a la cadena resultante la nueva fila α y no desaparece ninguna de las filas de C_h porque ellas figuran, por hipótesis, en todas las permanencias no comunes y, por lo tanto, en el conjunto Γ .

En particular, si la cadena C_h también es cerrada, repitiendo el mismo raciocinio para cada una de las h componentes de cada permanencia de C_h que figura en Γ , se obtiene una cadena resultante igualmente cerrada.

La aplicación de este teorema, conduce también a la *agregación* de una nueva fila a una cadena dada. La operación práctica puede disponerse como en el ejemplo 1 de este número.

Ejemplo 2:

$$C_3(5, n) = \{124\} \{125\} \{134\} \{135\} \{234\} \{235\}.$$

$$C'_3(5, n) = \{146\} \{156\} \{134\} \{135\} \{346\} \{356\}.$$

Resulta:

$$C''_3(6, n) = \{124\} \{125\} \{146\} \{156\} \{234\} \{235\} \{346\} \{356\}.$$

Ejemplo 3:

$$C_2(6, n) = \{12\} \{23\} \{34\} \{45\} \{56\} \{61\}.$$

$$C'_2(5, n) = \{17\} \{74\} \{45\} \{56\} \{61\}.$$

Resulta:

$$C''_2(5, n) = \{12\} \{23\} \{34\} \{47\} \{71\},$$

que es una cadena cuya clase, con respecto a la clase de $C_2(6, n)$, es menor en una unidad; pues han quedado eliminadas, en la operación, las filas 5 y 6 y ha quedado agregada la fila 7.

Ejemplo 4:

$$C_3(6, n) = \{124\} \{125\} \{146\} \{156\} \{234\} \{235\} \{346\} \{356\}.$$

$$C'_3(6, n) = \{124\} \{125\} \{147\} \{157\} \{234\} \{235\} \{347\} \{357\}.$$

Resulta:

$$C''_3(6,n) = \{146\} \{156\} \{147\} \{157\} \{346\} \{347\} \{356\} \{357\},$$

que es una cadena cuya clase es igual a la de las dadas; pues, en la operación ha quedado eliminada la fila 2. Esto se debe a que en los dos últimos ejemplos, no se cumplen todas las condiciones del teorema (III).

De la precedente definición resulta inmediatamente que:

IV) La cadena, C''_h resultante, formada por las permanencias no comunes de una cadena C_h y de cualquier cadena C'_h , separada de ella, es también una cadena separada de C_h y la cadena C'_h es la cadena resultante de C''_h y C_h .

Si convenimos en indicar la cadena resultante de C_h y C'_h con la notación

$$(C_h, C'_h) = C''_h,$$

se tendrá también

$$(C_h, C''_h) = C'_h.$$

En cuanto a las cadenas C'_h y C''_h , resulta inmediatamente de su definición que:

V) El conjunto de permanencias no comunes a las cadenas C'_h y C''_h , separadas de C_h , por una misma fila, componen la cadena C_h .

VI) Dos cadenas, C'_h y C''_h , separadas de una cadena C_h , por una misma fila a , extraña a ésta, no tienen más permanencias comunes que las formadas por la fila a .

Por esta razón se dirá que dos cadenas C'_h y C''_h , separadas de una cadena C_h por una misma fila a , extraña a ésta, están mutuamente separadas por la fila a o separadas entre sí por la fila a .

El conjunto de permanencias comunes a dos cadenas separadas de una cadena C_h por una misma fila a , se llama sección de la cadena C_h con la fila a .

VII) La sección de una cadena, C_h de orden $h > 0$, con una fila a , es otra cadena, C^{1}_{h-1} , de orden $h-1$. Si C_h es cerrada y su orden h , es mayor que uno, C^{1}_{h-1} también es cerrada.

En efecto, la fila a forma parte de una cadena C'_h separada de C_h por a . En todo sistema S'_h , perteneciente, (24, III), a la cadena C'_h , el sistema subordinado de primer orden, en el cual sea $X_a = 0$, es, (21, I), compatible. Siendo, (11), de característica complementaria $h' = h-1$, la correspondiente cadena, C^{1}_{h-1} , es, (24, I), de orden $h-1$. Si la cadena C_h , es además cerrada y su orden h , es mayor que uno, dicho sistema subordinado, (12, V y 25, I) es finito. Por lo tanto, (25, I), C^{1}_{h-1} , también es cerrada.

Indicando con N'_h , N''_h y N_{h-1}^1 el número de permanencias respectivamente de las cadenas C'_h , C''_h separadas de C_h por una misma fila a y de la sección C_{h-1}^1 , y con N_h , el de la cadena C_h , se tiene, en virtud de (V), la relación general:

$$N_h = N'_h + N''_h - 2 N_{h-1}^1.$$

De donde

$$N''_h = N_h + 2 N_{h-1}^1 - N'_h. \quad [27.1]$$

Válida para todos los casos cualquiera que sea la clase de la cadena resultante, C''_h , para todo $h > 0$. Cuando una de las cadenas separadas de C_h , por ejemplo, la C'_h , es una cadena elemental de orden h , ella tiene, (26, IV), $h + 1$ permanencias, luego

$$N'_h = h + 1.$$

Por la misma razón, es también

$$N_{h-1}^1 = h.$$

Sustituyendo, se obtiene

$$N''_h = N_h + h - 1. \quad [27.2]$$

Fórmula que vale también para $h = 1$, en virtud de (26, III).

VIII) *Las cadenas separadas de una cadena cerrada, son también cerradas*; pues, son finitos, (25, I), todos los sistemas que les pertenecen, por tener éstos, en virtud de (VII) y de la hipótesis, todos sus sistemas subordinados de primer orden, finitos.

IX) *Si C_h es una cadena no idéntica, ningún subconjunto propio del conjunto de sus permanencias, puede formar cadena cerrada de igual orden que C_h .*

En efecto, hay alguna permanencia de C_h que no figura en el conjunto mencionado. Si las permanencias de éste formasen una cadena cerrada de igual orden que C_h , con cada una de sus permanencias deberían figurar, (25), en el conjunto, sus h conjugadas.

Se deduce de aquí inmediatamente que:

X) *La condición necesaria y suficiente para que de una cadena cerrada de orden h , C_h , pueda ser separada una nueva cadena cerrada C'_h del mismo orden h , es que exista una sección de la cadena C_h .*

Ejemplo 5:

Consideremos la cadena C_4 (7, 4) del ejemplo 4 del número (26). Una cadena separada de ella por una fila a , es la siguiente:

$$C'_4(6,4) = \{1347\} \{1457\} \{137a\} \{134a\} \{145a\} \{157a\} \{347a\} \{457a\}.$$

La cadena resultante

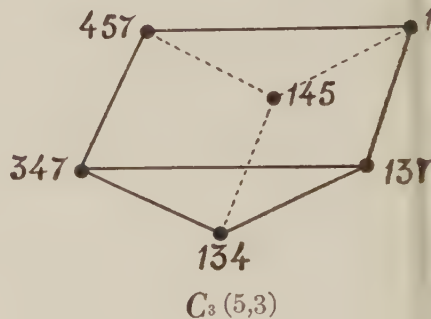
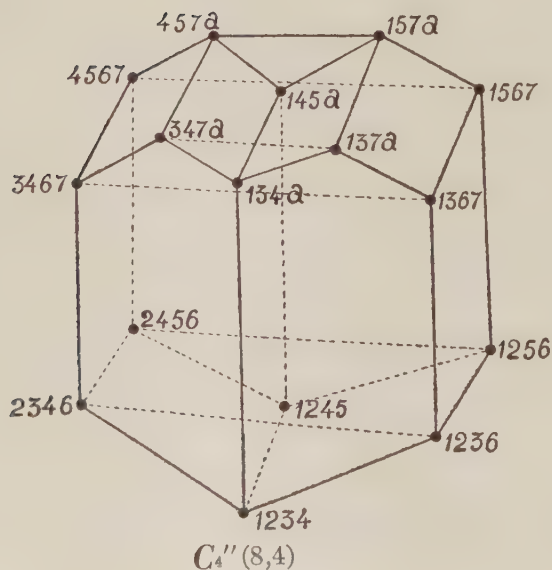
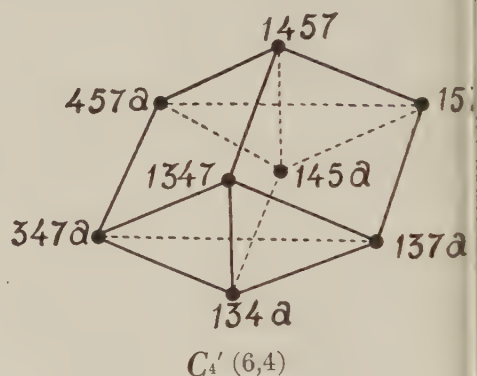
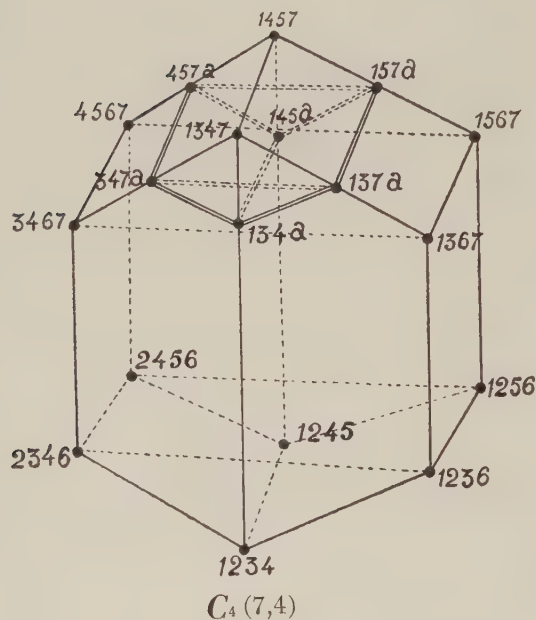
$$C''_4(8,4) = (C_4, C'_4), \text{ es:}$$

$$C''_4(8,4) = \{1234\} \{1236\} \{1245\} \{1256\} \{134a\} \{137a\} \{137a\} \{1367\} \{145a\} \\ \{1567\} \{157a\} \{2346\} \{2456\} \{3467\} \{347a\} \{4567\} \{457a\}.$$

La sección con la fila a , es la cadena

$$C_3(5,3) = \{134\} \{137\} \{145\} \{157\} \{347\} \{457\}.$$

El significado geométrico de estas operaciones está indicado claramente en las figuras adjuntas correspondientes:



Sea $C_h(m, n)$ una cadena cerrada no elemental de orden h y clase m . Será, (26), $m > h + 1$.

Partiendo de una cadena elemental de orden h , formada por $h + 1$ filas de $C_h(m, n)$, mediante $m - h - 1$ agregaciones sucesivas con las filas restantes, se obtiene, (II), una cadena $C_h(m, n)$ de igual orden y clase que la dada constituida por las mismas filas. Repitiendo esta operación, de todas las maneras posibles, no resultan, en general formadas, como podría creerse, todas las cadenas de orden h y clase m , como prueba el siguiente

Ejemplo 6:

Sean a, b, c, d, e, f , las seis filas de una matriz ternaria de tipo $T_3(6, n)$. Mediante agregaciones sucesivas y haciendo uso de la notación indicada en el número (26), formemos la siguiente cadena $C_3(6, n)$:

$$\begin{aligned}\{\{abcd\}\} &= \{abc\}\{abd\}\{acd\}\{bcd\} \\ \{\{abce\}\} &= \{abc\}\{abe\}\{ace\}\{bce\} \\ \{\{abdf\}\} &= \{abd\}\{abf\}\{adf\}\{bdf\}. \quad \text{Resulta:}\end{aligned}$$

$$C_3(6, n) = \{abe\}\{abf\}\{acd\}\{ace\}\{adf\}\{bcd\}\{bce\}\{bdf\}.$$

En esta terna de cadenas elementales componentes, las filas a y b figuran en las tres. Es fácil ver que cualesquiera que sean las ternas componentes, siempre tienen dos filas comunes y que estas filas — en nuestro caso, las a y b — forman parte de *cinco* permanencias de $C_3(6, n)$.

Ahora bien, la cadena

$$C_3'(6, n) = \{acd\}\{ace\}\{adf\}\{bcd\}\{bce\}\{bdf\}\{aef\}\{bef\},$$

pertenece al tipo de matriz considerada y en ella toda fila figura en *cuatro* permanencias. Luego esta cadena no puede ser obtenida por medio de agregaciones sucesivas de cadenas elementales.

Cuando una cadena cerrada, $C_h(m, n)$, se puede obtener por agregaciones sucesivas de cadenas elementales, diremos que es una *cadena primaria* de orden h y clase m . Las cadenas elementales que la componen se dirán *componentes primarias* de la cadena dada.

Ejemplo 7:

La cadena $C_3(6, n)$ del ejemplo 1 del número (26) tiene las tres componentes primarias siguientes:

$$\begin{aligned}\{\{1235\}\} &= \{123\}\{125\}\{135\}\{235\} \\ \{\{1245\}\} &= \{124\}\{125\}\{145\}\{245\} \\ \{\{2356\}\} &= \{235\}\{236\}\{256\}\{356\}\end{aligned}$$

Es inmediato que:

XI) *El número de componentes primarias de una cadena primaria de orden h y clase m es $m - h - 1$.*

28. SUSTITUCIÓN. Estudiemos, ahora, la otra operación con las cadenas. Es decir, la *sustitución*.

Las proposiciones sobre las que se funda son las siguientes:

I) *En toda cadena no idéntica $C_h(m, n)$, de clase m , mayor que su orden h , ($m > h > 0$), existen, por lo menos, dos permanencias con un orlado común; pues, en este caso, (21, I), la cadena consta de más de una permanencia, y cada una, (25), tiene en ella, por lo menos, una conjugada, las cuales, (22, III), tienen un orlado común.*

II) *Si una cadena elemental de orden $h > 0$, tiene dos permanencias comunes con una cadena C_h , de igual orden h , todas las filas de la primera pertenecen a la cadena C_h ; porque, (26, II), en una cadena elemental, dos permanencias cualesquiera de ella contienen todas sus filas.*

Una cadena elemental de orden $h > 0$ que tiene, por lo menos, dos permanencias comunes con una cadena C_h , de igual orden h , se dirá una *cadena elemental interior de C_h* , o simplemente *cadena interior de C_h* .

III) *Toda cadena no idéntica C_h , de más de una permanencia, tiene, por lo menos, una cadena interior.*

Por tener C_h , más de una permanencia, hay en ella, (24), dos permanencias conjugadas. La cadena elemental de orden $h > 0$, formada por las $h + 1$ filas de este par de conjugadas cumple la condición, puesto que tiene con C_h , por lo menos, dicho par de permanencias comunes. No se excluye la eventualidad de que pueda tener con C_h más permanencias comunes. En particular, esto sucede necesariamente, (27, II), si C_h , es, a su vez, una cadena elemental, o bien, una cadena unitaria, en cuyo caso se tiene inmediatamente que:

IV) *Toda cadena elemental interior de una cadena elemental coincide con la misma cadena, es decir, tiene las mismas permanencias que la cadena dada.*

V) *Si en una cadena de orden $h > 1$, $C_h(m, n)$, de clase m , mayor que su orden h , ($m > h > 1$), una misma fila i , pertenece a h permanencias de una misma cadena elemental interior de C_h , la fila i no pertenece a ninguna otra permanencia de la cadena C_h .*

En efecto, sea $R_h(\delta)$ un resolvente principal de cualquier $S_h(m, n)$, perteneciente, (26 III), a la dada cadena, siendo δ el determinante,

(21), de una de las permanencias a que pertenece la fila i . El sistema subordinado de primer orden de $S_h(m, n)$, en el cual es $X_i = 0$, resulta, (17, VIII), un sistema finito de clase h y, (11), de característica complementaria $h' = h - 1$, como se reconoce directamente en el $R_h(\delta)$ considerado. La correspondiente cadena, (24, III), es, (26), una cadena elemental de orden $h - 1 > 0$. Sus h permanencias son, (23), permanencias subordinadas de orden $h - 1$ de las de la cadena dada; luego, (23, II), la fila i , no puede pertenecer a ninguna otra permanencia de $C_h(m, n)$.

VI) Si C_h es una cadena primaria no elemental de orden h , el conjunto de permanencias no comunes a C_h y a toda cadena elemental interior de ella, distinta de sus componentes primarias, constituye una cadena, C'_h , de igual orden que C_h . Si la cadena elemental interior tiene menos de h permanencias comunes con C_h , la cadena C'_h tiene igual clase que la cadena dada, C_h .

En efecto, basta considerar, como en (27, II), el cuadro de las no coincidentes con ninguna de sus componentes primarias. Se demuestra análogamente que pueden subsistir todas las permanencias no comunes, excepto las que son comunes a ambas cadenas. En la hipótesis está excluido el caso de las cadenas unitarias, porque éstas son, (26, III), elementales.

He aquí desarrollado el razonamiento. Cualquiera que sea, (24, III), el sistema $S_h(m, n)$ perteneciente a dicha cadena, bastará considerar la sección de $S_h(m, n)$ por un hiperplano de modo que éste sustituya a una cara del sistema pasando por una de sus aristas y que separe los vértices correspondientes a las permanencias comunes, de los demás; lo cual es siempre posible por la convexidad. Eligiendo de ese modo dicho hiperplano su fila correspondiente cumple la condición de formar las permanencias indicadas, por cuanto la cadena elemental interior de que forma parte, no coincidiendo con ninguna componente de la cadena, no podrán reaparecer, en esta operación, permanencias ya suprimidas en las cadenas elementales componentes primarias de la dada. Sean, en C_h , $\{1\ 2\ 3 \dots (h-1)\ h\}$ y $\{1\ 2\ 3 \dots (h-1)\ k\}$, un par de permanencias conjugadas. Por ser $h > 1$, cada una de ellas tiene, en C_h , por lo menos, otra conjugada, sean éstas respectivamente:

$$\{123 \dots (h-1)\ a\} \quad \text{y} \quad \{123 \dots (h-1)\ b\} .$$

Del cuadro:

123 ... (h-1) h	123 ... (h-1) a ε	123 ... (h-1) b ε'
123 ... (h-1) h a ε'	123 ... (h-1) a h	123 ... (h-1) b h
123 ... (h-1) h b ε	123 ... (h-1) a b	123 ... (h-1) b a
123 ... (h-1) h k	123 ... (h-1) a k	123 ... (h-1) b k
.....		
.....		

se desprende inmediatamente que la permanencia común $\{123 \dots (h-1)h\}$ no puede ser permanencia simultáneamente con las otras dos del mismo cuadro, porque

$$\text{Sg. } (123 \dots (h-1) h a) \neq \text{Sg. } (123 \dots (h-1) h b).$$

De igual modo se prueba con cualquier otra permanencia común.

La segunda parte de la proposición se deduce de (IV), pues sólo en el caso de tener la cadena interior h permanencias comunes con C_h , una misma fila i , pertenecería necesariamente a todas ellas, por ser elemental la cadena interior; en virtud de (V), quedaría suprimida esa fila, resultando C'_h de clase menor, en una unidad, con respecto a la clase de C_h . En todos los otros casos en que el número de permanencias comunes es menor que h , tal reducción no es posible, porque en toda cadena elemental, (26, II), cada fila pertenece a h permanencias.

La operación que consiste en formar la cadena C'_h , compuesta de las permanencias no comunes de C_h y de una cadena elemental interior de ella que tiene con C_h menos de h permanencias comunes, se dirá *sustitución*. Ella permite, por lo tanto, colocar en una cadena primaria un número c' de permanencias de la misma matriz, que no formaban parte de dicha cadena, sin alterar ni su orden ni su clase en cambio de otras permanencias de C_h .

La nueva cadena C'_h así obtenida consta de todas sus componentes primarias más una nueva componente elemental distinta de éstas. A la cadena C'_h , se le puede aplicar nuevamente una sustitución, con tal que la cadena elemental interior elegida no coincida con ninguna componente de C'_h . Para demostrar esto basta observar que las únicas permanencias de las cadenas elementales interiores usadas en cada sustitución, que no pueden formar cadena con las demás, son las comunes. Si la nueva cadena interior elegida coincidiera con alguna cadena elemental componente de C'_h , en la operación, reaparecerían

permanencias suprimidas, las cuales no pueden formar cadenas con las existentes. Luego:

VII) Si C_h es una cadena cerrada de dadas componentes elementales, el conjunto de permanencias no comunes a C_h y a toda cadena interior de ella no coincidente con ninguna de sus componentes, constituye una cadena C'_h , de igual orden que C_h . Si la cadena interior tiene menos de h permanencias comunes con C_h , C'_h tiene igual clase que C_h .

Esta proposición constituye una generalización de la (VI). La demostraremos independientemente de toda consideración geométrica. Bastará probar, (24), que, en la correspondiente matriz, el conjunto Γ , constituido por las permanencias no comunes a C_h y a toda cadena interior que satisface las condiciones (VII), cada permanencia tiene una conjugada en Γ . En primer lugar, puesto que la cadena interior considerada, no coincide con ninguna componente de C_h , en la precedente operación, no aparecerán permanencias anteriormente suprimidas. Ahora bien, sea P una permanencia de Γ . Consideremos $h - 1$ filas de ella, pues es $h > 1$; puesto que C_h es cerrada, como así su cadena interior, (26, II), P tiene, en la cadena a que pertenece, h conjugadas. Sea P' la que tiene dichas $h - 1$ filas comunes con P . Si P' no pertenece a la cadena interior y esta eventualidad se presenta con todas las permanencias de Γ , el teorema está demostrado. Si P' pertenece a la cadena interior, como ésta es cerrada, tiene P' todas sus conjugadas en ella y, por lo tanto, tendrá la P'' que tiene con la P' dichas $h - 1$ filas comunes. Las permanencias P' y P'' no pueden ser comunes a ambas cadenas, de lo contrario, habría en una de ellas tres permanencias, P , P' , y P'' con $h - 1$ filas comunes, lo cual es imposible, (22, II). Luego cada permanencia del conjunto Γ , tiene en él no sólo una, sino h conjugadas, como resulta de aplicar este mismo razonamiento a cada una de las h componentes de P .

La segunda parte es inmediata consecuencia de (V) y se prueba como en el teorema (VI).

Para aplicar este teorema, es preciso que se conozcan previamente las componentes elementales de la cadena. Pero esta aparente limitación, no es un inconveniente como veremos.

Ejemplo 1:

La cadena $C_4(6, n)$ del ejemplo 3 del número (26) se puede obtener componiendo tres cadenas elementales como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\{\{12345\}\} &= \{1234\}\{1235\}\{1245\}\{1345\}\{2345\} \\ \{\{12456\}\} &= \{1245\}\{1246\}\{1256\}\{1456\}\{2456\} \\ \{\{23456\}\} &= \{2345\}\{2346\}\{2356\}\{2456\}\{3456\}.\end{aligned}$$

La primera operación es una *agregación* y la segunda, una *sustitución*.

La cadena C'_h , que resulta de aplicar a una cadena la sustitución, la llamaremos también *cadena resultante*. Cuando sea necesario distinguir entre las cadenas resultantes obtenidas por agregación o por sustitución, diremos *cadena resultante por agregación*, o bien *cadena resultante por sustitución*, respectivamente. Llamaremos *composición de cadenas* a la aplicación de una cualquiera de las dos precedentes operaciones. En particular:

VIII) *La cadena resultante por composición, de una cadena cerrada, también es cerrada.*

Si se trata de una agregación, está probado en (27, VIII). Para el caso de una sustitución, está probado en la demostración del teorema precedente.

En lo que sigue, utilizaremos particularmente la agregación por cadenas elementales E_h .

Si C_h es una cadena, las cadenas resultantes obtenidas de ella por agregación o por sustitución, es decir, por composición con cadenas elementales E_h , separadas o interiores de C_h , las designaremos respectivamente con notaciones de la forma:

$$(C_h, E_h)_a = C'_h \quad ; \quad (C_h, E_h)_s = C'_h \quad ;$$

o simplemente con

$$(C_h, E_h) = C'_h$$

cuando no interese distinguir si se trata de una u otra operación.

En la práctica, la *sustitución* puede ser dispuesta como la *agregación*, (27, II, Ej. 1).

Ejemplo 2:

La cadena $C'_3(6, n)$, del ejemplo 1, número (26), se deduce de la cadena primaria $C_3(6, n)$ de componentes $\{\{1235\}\}$, $\{\{1245\}\}$ y $\{\{2356\}\}$, del mismo Ej., mediante las sustituciones siguientes:

$$\begin{aligned}C_3(6, n) &= \{123\} \{124\} \{135\} \{145\} \{236\} \{245\} \{256\} \{356\} \\ E_3^n &= 134 \{135\} \{145\} \{345\}.\end{aligned}$$

Resulta la cadena primaria de componentes $\{\{1234\}\}$, $\{\{2346\}\}$ y $\{\{2356\}\}$:

$$C_3^2(6, n) = \{123\} \{124\} \{134\} \{236\} \{245\} \{256\} \{345\} \{356\}$$

$$E_3^2 = \{124\} \{125\} \{145\} \{245\} \dots$$

Esta tercera cadena también es primaria cuyas componentes son $\{\{1235\}\}$, $\{\{1345\}\}$ y $\{\{2356\}\}$:

$$C_3^3(6, n) = \{123\} \{125\} \{134\} \{145\} \{236\} \{256\} \{345\} \{356\}$$

$$E_3^3 = \{345\} \{346\} \{356\} \{456\} \dots$$

$$C_3^4(6, n) = \{123\} \{125\} \{134\} \{145\} \{236\} \{156\} \{346\} \{456\}$$

que es la cadena $C'_3(6, n)$.

Ejemplo 3:

La cadena $C'_4(6, n)$ del ejemplo 3, número (26), se deduce de la $C_4(6, n)$ del mismo, cuyas componentes han sido calculadas en el ejemplo 1 de este número, mediante las sustituciones siguientes:

$$C_4(6, n) = \{1234\} \{1235\} \{1246\} \{1256\} \{1345\} \{1456\} \{2346\} \{2356\} \{3456\}$$

$$E_4^1 = \{1235\} \{1236\} \{1256\} \{1356\} \{2356\} \dots$$

$$C_4^1(6, n) = \{1234\} \{1236\} \{1246\} \{1345\} \{1356\} \{1456\} \{2346\} \{3456\}$$

$$E_4^2 = \{2345\} \{2346\} \{2356\} \{2456\} \{3456\} \dots$$

$$C_4^2(6, n) = \{1234\} \{1236\} \{1246\} \{2345\} \{2356\} \{2456\} \{1345\} \{1356\} \{1456\}$$

$$E_4^3 = \{1345\} \{1346\} \{1356\} \{1456\} \{3456\} \dots$$

$$C'_4(6, n) = \{1234\} \{1236\} \{1246\} \{1346\} \{2345\} \{2356\} \{2456\} \{3456\}$$

Indicando con c el número de permanencias comunes a la cadena C_h y a la dada cadena interior a ella, se tiene, (II y VI)

$$1 < c < h. \quad [28.1].$$

La diferencia, c' , entre el número de permanencias de la cadena resultante por sustitución, C'_h y el de la cadena dada C_h , es, por lo tanto, para todo $h > 1$,

$$c' = h + 1 - 2c \quad [28.2],$$

puesto que toda cadena elemental de orden h , tiene, (26, IV), $h + 1$ permanencias, y en la sustitución se agregan éstas a las de C_h y se suprimen las comunes, o sea $2c$.

La relación entre los números $N_h(m)$ y $N'_h(m)$ de permanencias de C_h y C'_h , respectivamente, es, en consecuencia:

$$N'_h(m) = N_h(m) + h + 1 - 2c. \quad [28.3].$$

Son importantes los casos particulares de las cadenas binarias y de las ternarias.

Para las cadenas binarias, siendo $h = 2$ y $c = 2$, resulta:

$$c' = h + 1 - 2c = 3 - 4 = -1.$$

La clase de C'_2 es menor, en una unidad, que la de C_2 . Es decir, queda suprimida una fila en la cadena C_2 , lo que está de acuerdo con el teorema precedente. Luego:

IX) *La sustitución es solamente aplicable a las cadenas no elementales de orden mayor que dos.*

Para las cadenas ternarias siendo en ellas, $h = 3$, $c = 2$, resulta:

$$c' = h + 1 - 2c = 4 - 4 = 0.$$

En consecuencia:

X) *El número de permanencias de una cadena ternaria, es invariante en la sustitución, y ellas son las únicas cadenas que gozan de tal propiedad.*

La proposición es inmediata consecuencia de la relación [28.2] y de la limitación del número c , el cual no puede ser, en virtud de [28.1], sino igual a 2, para $h = 3$.

En otras cadenas de orden $h > 3$, puede suceder que alguna sustitución no altere el número de sus permanencias; y esta circunstancia se presentará segura y solamente cuando sea, [28.2]:

$$2c = h + 1,$$

pero, como c puede tomar, en este caso, otros valores, existen sustituciones que alteran dicho número de permanencias.

OBS.: La precedente propiedad, válida solamente para las cadenas ternarias, hace que el estudio morfológico de las correspondientes figuras sea más fácil.

Demostremos, finalmente, el teorema fundamental sobre composición de cadenas del que se ha hecho mención al comienzo de este número:

XI) *Toda cadena cerrada no elemental, de clase m y orden $h > 1$ puede ser deducida de una cadena elemental de igual orden h , mediante un número finito de agregaciones y sustituciones.*

Sea, (24):

$$C_h = P^1 P^2 \dots P^c P^{c+1} \dots P^t \dots P^r$$

la cadena dada mediante sus $r = N_h(m)$ permanencias P^t .

Por ser cerrada, (25), tiene permanencias conjugadas. Sean P^1 y P^2 un par de ellas. Consideremos, (I), la cadena elemental de orden $h > 1$:

$$E_h^1 = P^1 P^2 \dots P^c Q^{c+1} \dots Q^{h+1}$$

formada por las $h + 1$ filas del orlado común de P^1 y P^2 .

Por ser $h > 1$, E_h^1 tiene, (26, IV), $h + 1 > 2$ permanencias, entre las cuales hay al menos una, (27, IX), que no figura en C_h . Como C_h , es cerrada y no elemental por hipótesis, hay alguna permanencia en ella que tampoco está en E_h^1 . Sea Q^{c+1} , una permanencia de E_h^1 que no está en C_h . Las dos permanencias P^c , Q^{c+1} , por pertenecer a una cadena elemental, tienen $h - 1$ filas comunes; es decir, son conjugadas. Puesto que se trata, además, de cadenas cerradas, cada permanencia tiene, (25), en la cadena a que pertenece, h conjugadas. Entre las h conjugadas de P^c , la que tiene dichas $h - 1$ filas comunes con ella, no puede, (22, II), pertenecer a E_h^1 ; está, pues, en la cadena C_h . Sea la permanencia P^{c+1} ; será, por lo tanto, también conjugada de Q^{c+1} . La nueva cadena elemental, E_h^2 , formada por las $h - 1$ filas de P^{c+1} y Q^{c+1} , es distinta de E_h^1 , porque P^{c+1} no pertenece a ésta.

La cadena resultante, $C_h^{1,2}$, que se obtiene componiendo E_h^1 y E_h^2 , pues éstas son separadas entre sí, (27, I), contiene seguramente, (27, III), las permanencias

$$P^1, P^2, \dots, P^c, P^{c+1} \text{ de } C_h;$$

luego

$$C_h^{1,2} = (E_h^1, E_h^2) = P^1 P^2 \dots P^c P^{c+1} \dots$$

Si en $C_h^{1,2}$ están todas las permanencias de la dada cadena C_h , la cadena $C_h^{1,2}$, no puede tener, (27, IX), otras permanencias, por ser C_h , cerrada; y el teorema está demostrado.

Si en $C_h^{1,2}$ no están todas las permanencias de C_h , tendrá permanencias de E_h^1 y de E_h^2 , pero no contendrá, seguramente, (27, III), a la permanencia común Q^{c+1} . Sea Q una permanencia de $C_h^{1,2}$, no perteneciente a C_h . Ella estará, (27, III), o bien en E_h^1 o bien en E_h^2 . La Q , tiene, en la cadena elemental a que pertenece, una conjugada P^r . Del mismo modo que hemos razonado antes, resulta tener Q , en C_h , una permanencia conjugada, P^{c+2} , que no pertenece a $C_h^{1,2}$.

La cadena elemental de orden h , E_h^3 , constituida por las $h + 1$ filas de P^{c+2} y Q , o bien es separada de $C_h^{1,2}$ o bien es interior a ella y distinta de sus otras componentes puesto que éstas no contienen a P^{c+2} , en ambos casos la cadena $C_h^{1,2,3}$, que resulta de componer la $C_h^{1,2}$ con E_h^3 , o sea

$$C_h^{1,2,3} = (C_h^{1,2}, E_h^3) = P^1 P^2 \dots P^c P^{c+1} P^{c+2} \dots$$

contiene, seguramente las permanencias

$$P^1, P^2, \dots, P^c, P^{c+1}, P^{c+2} \text{ de } C_h.$$

Así siguiendo, con un número finito de agregaciones y sustituciones, es decir, de composiciones de cadenas elementales, se obtendrá, al fin, una cadena cerrada $C_h^{1,2,3,\dots,p}$, de orden h que contiene a todas las r permanencias de C_h . Pero ella, en virtud de (27, IX), no puede tener otras; luego, dicha cadena coincide con la C_h dada.

En las aplicaciones prácticas del presente teorema conviene representar una cadena elemental de orden h , E_h , formada por las $h + 1$ filas

$$1, 2, 3, \dots, h, h + 1$$

con la notación del número (26):

$$E_h = \{ \{123 \dots h(h+1)\} \} = \{123 \dots h\} \{123 \dots (h-1)(h+1)\} \dots \{23 \dots h(h+1)\}.$$

Así:

$$\{ \{12345\} \} = \{1234\} \{1235\} \{1245\} \{1345\} \{2345\}.$$

Ejemplo 3:

Deduzcamos, como aplicación del precedente teorema, la cadena $C_4(7, n)$ del ejemplo 4 del número (26).

Ella resulta de componer, sucesivamente, las cadenas elementales de cuarto orden que se indican a continuación:

$$\{ \{12345\} \} = \{1234\} \{1235\} \{1245\} \{1345\} \{2345\}$$

$$\{ \{12356\} \} = \{1235\} \{1236\} \{1256\} \{1356\} \{2356\}$$

$$\{ \{13457\} \} = \{1345\} \{1347\} \{1357\} \{1457\} \{3457\}$$

$$\{ \{23456\} \} = \{2345\} \{2346\} \{2356\} \{2456\} \{3456\}$$

$$\{ \{34567\} \} = \{3456\} \{3457\} \{3467\} \{3567\} \{4567\}$$

$$\{ \{13567\} \} = \{1356\} \{1357\} \{1367\} \{1567\} \{3567\}$$

Resulta compuesta la mencionada cadena:

$$C_4(7, n) = \{1234\} \{1236\} \{1245\} \{1256\} \{1347\} \{1367\} \{1457\} \\ \{1567\} \{2346\} \{2456\} \{3467\} \{4567\} .$$

Se ha partido de la cadena elemental de cuarto orden, $\{\{1\ 2\ 3\ 4\ 5\}\}$; se han hecho a ésta, primeramente *dos agregaciones* y después *tres sustituciones* y se ha obtenido la $C_4(7\ n)$.

Las permanencias escritas en *bastardilla* son las que desaparecen en cada operación.

29. Número de permanencias de una cadena. — En cuanto al número de permanencias, en general, de una cadena $C_h(m, n)$, depende del orden h , de la clase m y de las *sustituciones* que es preciso hacer en una cadena *primaria* de igual orden y clase para obtener la cadena dada, puesto que, en cada una de estas operaciones, el número de permanencias varía según la fórmula [28.3]. Hacen excepción a esta regla las cadenas *unitarias* y *binarias*, las que pueden ser obtenidas sin hacer uso de sustituciones. También hacen excepción a esta regla las cadenas *ternarias*, en virtud de (28, X).

En estos casos y en el caso de las cadenas primarias, demostraremos que:

I) *El número de permanencias de una cadena primaria cerrada de orden $h > 0$ y de clase m , es:*

$$N_h(m) = (h - 1)(m - h) + 2. \quad [29.1]$$

En efecto, por ser cerrada la cadena, es $m > h > 0$. Por ser además primaria, es obtenida, (27, XI), por agregaciones sucesivas de cadenas elementales. Ahora bien, una cadena elemental de orden h , tiene, (26, IV), $h + 1$ permanencias y en cada operación, [27.2], se agregan a la cadena precedente $h - 1$ permanencias, resulta, por lo tanto:

$$N_h(m) = h + 1 + (h - 1)(m - h - 1),$$

o sea la [29.1].

Ejemplo 1:

La cadena $C_5(7, n)$ del ejemplo 3 del número (24) que para $n = 5$, corresponde a politopos como el representado en el ejemplo 2 del número (20),

es una cadena *primaria* cuyas componentes elementales son $\{\{123456\}\}$ y $\{\{123467\}\}$, como es fácil comprobarlo.

Para esta cadena, resulta:

$$N_6(7) = 4 \cdot (7 - 5) + 2 = 10.$$

La fórmula [29.1] vale, pues, para todas las cadenas unitarias, binarias y ternarias, es decir para $h = 1, 2, 3$. Se obtiene respectivamente:

$$N_1(m) = 2 \quad ; \quad N_2(m) = m \quad ;$$

$$N_3(m) = 2(m - 3) + 2 \quad \dots$$

$$N_3(m) = 2(m - 2). \quad [29.2]$$

Fórmula que da el número de permanencias de una cadena *ternaria*.

Obs.: Nótese que resulta así calculado, independientemente del teorema de EULER, mediante esta última fórmula, el número de *vértices* de todo poliedro *trigonal* ⁽¹⁾ cerrado del espacio ordinario, en función del número de sus caras.

En el próximo párrafo daremos una sencilla demostración del teorema general de EULER para todo politopo convexo de n dimensiones, basada en el cálculo de cadenas. Pero, para ello, será preciso estudiar todavía, otra operación con las cadenas y además, deducir las *cadenas singulares*.

Sin embargo, demostraremos, a modo de ejercicio, el teorema de EULER, para los poliedros cerrados ordinarios porque, para este caso, no son necesarios nuevos conceptos.

Ejemplo 2:

Consideremos primeramente el caso *trigonal*.

Según la fórmula [29.2], todo poliedro cerrado de este tipo, y de $C = m$ caras, tiene $V = 2(m - 2)$ *vértices*. Tendrá, por consiguiente:

$$A = \frac{3}{2} V = 3(m - 2) \quad \text{aristas,}$$

puesto que cada una de éstas une dos vértices.

(1) Es decir, poliedro, en que por cada vértice pasan sólo tres aristas.

De la identidad:

$$m + 2(m - 2) \equiv 3(m - 2) + 2,$$

resulta la conocida fórmula de EULER:

$$C + V = A + 2. \quad [a]$$

Ahora bien; todo poliedro cerrado de C caras, que no sea trigonal, puede ser deducido de un poliedro trigonal de C caras reuniendo dos vértices que tienen una arista común en uno sólo y dejando invariable el número, C , de sus caras. Pero, en cada una de estas sucesivas operaciones, desaparece un vértice y una arista; subsiste, por lo tanto, la $[a]$. El teorema está demostrado pues, con toda generalidad, para el espacio ordinario.

(Continuará)

SOBRE EFECTOS DE LA RADIACION SOLAR EN LA ESTRATOSFERA

POR EMILIO L. DIAZ

ABSTRACT

The autor find a coneation between solar radiation, temperature, and height of the base of atratosphere; increasing temperature, and falling height, when solar radiation rise, for simultaneous values, and a mínimun of temperature and maximun altitude, two days after solar radiatien maximun.

That fact was found for some USA stations in temperate zone.

En trabajos anteriores mostramos, utilizando el cálculo de correlación, la conexión que existía entre la velocidad del viento a grandes alturas ⁽¹⁾, y la radiación solar; aquí trataremos de estudiar cómo varían en función de dicha radiación, otras variables, tales como la temperatura de la base de la estratósfera, su altura, y la velocidad del viento en dicha base, cuando ello sea posible.

Hemos empleado en el presente estudio, sondajes efectuados en los Estados Unidos, que fueron publicados en el *Monthly Weather Review*, y los valores diarios de la radiación solar encontrados por la Smithsonian Institution; todas las estaciones empleadas están situadas en la zona templada, de manera que los resultados medios que hallemos se referirán a esos lugares.

Como auxiliares, se han computado los sondajes efectuados hasta los 6000 metros en algunas estaciones argentinas.

El resumen de nuestros cálculos de correlación está dado en los cuadros 1 y 2, que se refieren a la onda de período 5 días.

Del examen de estos cuadros se deduce que el día con máximo de radiación solar coincide con valores de la temperatura de la base de la estratósfera por encima de la curva eje, en los días que siguen,

(1) Ver mis varios trabajos «Sobre la circulación atmosférica», «Anales de la Sociedad Científica Argentina», T. CXIX, pág. 215 y sig.; y «La velocidad del viento en Cristo Redentor y la radiación solar», en los mismos anales, T. CXXII, pág. 248 y siguientes.

días 1, 2 y 3, la temperatura desciende por debajo del término medio, alcanzando su mínimo, según el cuadro 2, dos días después del máximo solar.

Con respecto a la altura de la base de la estratósfera, el primer efecto, simultáneo con el calor emitido por el sol, cuando éste es un máximo, es deprimir la base de la estratósfera, luego la altura aumenta, y alcanza su mayor valor dos días después del máximo de radiación, y coincidiendo con el mínimo térmico.

Comparando la evolución del viento con la temperatura, se nota que el aumento de la velocidad va acompañado por un aumento de la temperatura y una disminución en la altura de la base de la estratósfera.

El número de valores de que se dispone, en la parte que se refiere a la velocidad del viento, no permite sacar consecuencias, pero ofrece ciertas indicaciones tales como las mencionadas anteriormente.

Si nos basamos, para deducir los efectos de un máximo de radiación sobre el viento, en los resultados encontrados para la temperatura y altura de la base de la estratósfera, la conclusión será que un máximo de calor emitido por el sol provoca un máximo de velocidad de viento en la base, siendo estos máximos simultáneos.

Empleando los sondeos efectuados en Cristo Redentor, cuya situación geográfica es latitud 33° S, y longitud 70° W, en los 6000 metros, durante el espacio de tiempo que va de Junio 1936 a Noviembre 1936, los resultados del cálculo de correlación para la onda de período 5 días, son:

0 días	r . . .	0,37	$\frac{r}{e}$. . .	6,3
1 día	r . . .	—0,12	. . .	1,7
2 días	r . . .	—0,31	. . .	4,9

con un total de 95 valores empleados.

Resultado éste análogo con el inducido para el viento en la base de la estratósfera, en la zona templada de los EE. UU.

Igual examen y cálculo hecho para C. Rivadavia, latitud 46° S, y longitud 67° W, dió:

0 días	r . . .	0,125
1 día	r . . .	—0,118
2 días	r . . .	—0,152

con 76 valores utilizados.

Por otra parte, en un trabajo anterior aparecido en estos mismos « Anales » ⁽¹⁾, hicimos notar que un máximo de radiación solar era seguido por máximos de velocidad de viento en los 7000 metros en la zona templada de los Estados Unidos, con un intervalo medio de un día.

Hemos calculado el coeficiente de correlación entre la temperatura en la base de la estratósfera y la temperatura en el suelo, para algunas de las estaciones norteamericanas empleadas en este trabajo con el resultado que sigue:

0 días	r	— 0,07
1 día	r	0,27
2 días	r	0,13
3 días	r	— 0,10

Estos valores del coeficiente son pequeños, y el número de datos utilizados escaso (45); el primer hecho nos sugiere la idea de que ambas ondas no estén ligadas directamente.

Un examen de los sondados efectuados en Buenos Aires, latitud 35° S y longitud 58° W, parece mostrar que en el nivel de los 6000 metros la correlación entre la radiación solar y la velocidad del viento a esa altura es positiva y el defasaje es 1 día y medio, siendo, por otra parte, bastante probable que la situación geográfica de las estaciones tenga influencia en la prontitud o retardo con que acusen las variaciones del calor emitido por el sol.

Los resultados que anteceden pueden ser resumidos así. Para la zona templada:

- 1) Un aumento de calor emitido por el sol, incrementará la temperatura de la estratósfera, el mismo día que aquél ocurra.
- 2) Simultáneamente la altura de la base de la estratósfera disminuirá.
- 3) El aumento de radiación solar irá acompañado por una mayor velocidad del viento en la estratósfera y en alturas inferiores, por lo menos hasta los 6000 metros, con defasajes que variarán entre 0, 1 y 2 días.
- 4) El máximo de calor emitido por el sol, irá seguido, dos días después, de un mínimo térmico en la estratósfera y un máximo de altura de la base de la misma.

(1) « Sobre la circulación atmosférica », T. CXIX, pág. 215 y sig.

- 5) La temperatura en la base de la estratósfera está en fase con la temperatura en el suelo, un día después, en la zona central templada de los EE. UU., siendo este efecto quizás un resultado indirecto.

CUADRO I

Coefficientes de correlación entre la radiación solar, temperatura, altura de la base y velocidad del viento

	Temp.	Altura	Viento base
<i>Royal Center, lat. 41° N, long. 86° W; Mayo 1926; n... 11</i>			
0 días	0,26	— 0,22	
1 día	— 0,31	0,27	
2 días	— 0,43	0,54	
3 días	— 0,42	0,61	
<i>Groesbeck (Tejas); Octubre 1927; n... 11</i>			
0 días	0,81	— 0,78	0,49
1 día	0,00	0,29	— 0,55
2 días	— 0,73	0,83	— 0,58
3 días	— 0,20	0,05	0,23
<i>Broken Arrow, lat. 36° N y long. 96° W; Diciembre 1929; n... 13</i>			
0 días	0,13	— 0,55	— 0,18
1 día	0,39	— 0,62	0,50
2 días	0,33	— 0,35	0,58
3 días	0,00	0,43	— 0,15
<i>Royal Center; Septiembre 1930; n... 6</i>			
0 días	0,62	— 0,27	
1 día	— 0,12	0,56	
2 días	— 0,90	0,87	
3 días	— 0,09	— 0,24	
<i>Royal Center; Febrero 1931; n... 15</i>			
0 días	0,13	0,48	
1 día	— 0,47	0,63	
2 días	— 0,31	— 0,01	
3 días	0,22	— 0,69	
<i>Omaha, lat. 41° N y long. 96° W; Enero 1934; n... 19</i>			
0 días	0,34	— 0,25	
1 día	0,13	— 0,03	
2 días	0,00	0,20	
3 días	0,13	— 0,15	

CUADRO II

Promedios de los coeficientes hallados

	Temp.	Altura	Altura	
0 días	0,38	$\frac{r}{e}$. . . 5,9	— 0,26	$\frac{r}{e}$. . . 3,7
1 día	— 0,06		0,18	
2 días	— 0,34	. . . 5,0	0,35	. . . 5,2
3 días	— 0,06		0,00	

 $n = 75$.

Nota: tanto en el cuadro I, como en el II, las correlaciones de la temperatura están referidas a los valores absolutos (-273°C).

LA CURVA LOGISTICA REPRESENTATIVA DEL DESARROLLO NUMERICO DE LA POBLACION HUMANA

POR E. NATALE

(INST. DE ESTADISTICA — UNIV. LITORAL)

A instancias de A. Quetelet, el Prof. P. F. Verhulst publicó en 1838 una corta memoria en la que admite que la tasa de crecimiento de la población humana sufre obstáculos proporcionales a la población misma.

Escribe, entonces :

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \gamma N) N \quad [1]$$

siendo ε el coeficiente biológico de procreación, positivo, γ un coeficiente de proporcionalidad, también positivo, y N la población en un tiempo cualquiera, considerada suficientemente numerosa.

Por su naturaleza, la función N es esencialmente positiva y admitido además de que es *continua*, por la [1] se ve que es *acotada superiormente*. Basta, en efecto, observar que cuando

$$N = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad \text{resulta} \quad \frac{dN}{dt} = 0$$

Si suponemos que la función pudiese ser mayor que este valor, a partir de ese momento se verificaría

$$\frac{dN}{dt} < 0 ,$$

es decir, que se haría decreciente en el instante mismo en que

$$N > \frac{\varepsilon}{\gamma} .$$

Por consiguiente, la función N no puede pasar de ese valor, ni tampoco puede ser decreciente *en ningún momento*.

Resolviendo la [1] y mediante algunas substituciones, puede ponérsela en la siguiente forma, que es la introducida por G. U. Yule:

$$N = \frac{K}{1 + e^{\frac{\beta-t}{\alpha}}} \quad [2]$$

Esta fórmula *ajusta* con bastante aproximación el desarrollo numérico de la población de muchos países suficientemente poblados y es la que hoy se sigue aplicando, especialmente después de los trabajos de Pearl y Reed (1920).

Para la determinación de los parámetros K , α y β , el procedimiento más corriente es el de utilizar tres datos censales, que deben encontrarse equiespaciados respecto al tiempo, para hacer *prácticamente* posible el problema.

Emplearemos el método que sigue E. Krummeich en *Journal de la Société de Statistique de Paris* (1927).

Sean los tres censos elegidos

$$N_0 < N_1 < N_2$$

y consideremos igual a la unidad el intervalo de tiempo que separa a dos censos consecutivos. Tomando las recíprocas, podemos escribir las tres ecuaciones de condición:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0} &= \frac{1}{K} \left(1 + e^{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \\ \frac{1}{N_1} &= \frac{1}{K} \left(1 + e^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \right) \\ \frac{1}{N_2} &= \frac{1}{K} \left(1 + e^{\frac{\beta-2}{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad [I]$$

Haciendo:

$$d_1 = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{N_1} = \frac{1}{K} e^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$$

y

$$d_2 = \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2} = \frac{1}{K} e^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}} \right)$$

obtenemos:

$$\frac{d_1}{d_2} = e^{\frac{1}{\alpha}} \quad [a] \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\log. e}{\log. \frac{d_1}{d_2}}$$

Por otra parte, se deduce que:

$$\frac{d_1^2}{d_1 - d_2} = \frac{1}{K} e^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Cuyo valor substituído en la primera de las ecuaciones (I) nos da:

$$K = \frac{N_o (d_1 - d_2)}{d_1 - d_2 - N_o \cdot d_1^2} \quad [b]$$

Y finalmente de:

$$K \cdot \frac{d_1^2}{d_1 - d_2} = e^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

se obtiene:

$$\beta = \frac{\log K + \log \frac{d_1^2}{d_1 - d_2}}{\log \frac{d_1}{d_2}} \quad [c]$$

Los tres datos censales elegidos pueden arrojar valores numéricos tales, que no sea posible hacer pasar por ellos la curva logística dada por la [2]. Y este hecho se presenta en la práctica con alguna frecuencia.

El objeto de esta nota es dar un criterio sencillísimo que nos permita determinar inmediatamente si los tres censos se encuentran sobre la curva [2].

Se observa, en primer término, que el parámetro α debe ser positivo y para ello debemos tener, conforme a la (a)

$$\frac{d_1}{d_2} > 1$$

o sea:

$$\frac{(N_1 - N_o) N_2}{(N_2 - N_1) N_o} > 1$$

De donde sacamos que:

$$N_1 > \frac{2 N_o \cdot N_2}{N_2 + N_o} \quad [a']$$

Por otra parte, por el origen de la curva, dado por la ecuación [1], el parámetro K debe ser finito y por la (b) ha de verificarse que:

$$d_1 - d_2 > N_o \cdot d_1^2$$

debiendo observarse que el numerador de la fracción que da el valor de dicho parámetro, es positivo por la condición (a).

Dividiendo por d_1 la desigualdad anterior, tenemos:

$$1 - \frac{d_2}{d_1} > N_o \cdot d_1$$

o sea:

$$1 - \frac{(N_2 - N_1) N_o}{(N_1 - N_o) N_2} > \frac{N_1 - N_o}{N_1}$$

lo que es igual a:

$$\frac{N_o}{N_1} > \frac{(N_2 - N_1) N_o}{(N_1 - N_o) N_2}$$

De donde:

$$N_1 \cdot N_o > \frac{N_o^2 \cdot N_2}{N_1}$$

Y finalmente:

$$N_1 > \sqrt{N_o \cdot N_2} \quad [b']$$

Mediante consideraciones diferentes de las que hemos hecho en esta nota y partiendo de una forma distinta dada a la curva [2], este resultado ha sido obtenido también por B. de Finetti, *Istituto Centrale di Statistica del Regno d'Italia* (vol. X, 1931).

Las condiciones (a') y (b') son indispensables para que los tres valores se encuentren sobre una logística. Pero es el caso que la segunda condición involucre la primera. En efecto:

$$\sqrt{N_o \cdot N_2} > \frac{2 N_o \cdot N_2}{N_2 + N_o}$$

$$\therefore \frac{N_2 + N_o}{2\sqrt{N_o \cdot N_2}} > 1$$

ya que:

$$\frac{N_2 + N_o}{2} > \sqrt{N_o \cdot N_2}$$

Por consiguiente, la condición *necesaria y suficiente* para que sea posible hacer pasar por los tres puntos elegidos una curva logística, es que el dato central sea *mayor* que la media geométrica de los otros dos.

En cuanto al parámetro β , que da el punto de inflexión de la curva, puede ser positivo, nulo o negativo, según que el primer censo escogido haya alcanzado o nó dicho punto.

BIBLIOGRAFÍA

DE LIBROS RECIBIDOS EN LA ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS,
FÍSICAS Y NATURALES

POR C. C. D.

Actualités Scientifiques et Industrielles.

Folletos (16,5 × 25,5) editados por Hermann & Cie. París. Números de páginas y precios variables. Se detallan los últimos recibidos siguiendo la numeración consecutiva.

Nº 311 y 372. — ANTONY (R.) & FRIANT (M.). *Théorie de la Dentition jugale mammalienne*. Dos folletos con 72 págs., 21 figuras y 2 láminas fuera de texto, el primero; 80 páginas, 65 figuras y 6 láminas fuera de texto, el otro; 1935 y 1936. Precios: 15 y 20 francos, respectivamente.

Constituyen los fascículos I y II de la serie “Exposés d’Anatomie Comparée”, dirigida por el autor R. Anthony, profesor del Museo nacional frances de Historia Natural.

El primer folleto trata *La molar de los mamíferos. Su carácter fundamental y su tipo morfológico arcaico*. El segundo, escrito con la colaboración de la señorita M. Friant, la *Evolución de la molar en los mamíferos placentarios a partir de la iniciación de los tiempos terciarios*.

Se expone una teoría dental nacida en el laboratorio del autor Anthony, cuyo punto de partida toma pie en las vistas de Forsyth Major y, en parte, en las de Florentino Ameghino. Un grabado sobre madera, retrato de Forsyth, encabeza el libro. Siguiendo los consejos y la dirección de Anthony, la señorita Friant se dedicó al estudio de la cuestión y consagró a ella su tesis doctoral (en ciencias). A fin de oponer esa teoría a la clásica de la trituberculia, se ha designado a la nueva con el nombre de *multituberculia*; esta última teoría admite que lo que debe tomarse como base de la evolución morfológica de la molar mamaliana, es un tipo dental de numerosos tubérculos. El profesor Anthony opina que el nombre más apropiado para designarla sería, empero: *teoría de la triseriación superior y de la biseriación inferior*, pues lo esencial en ella es que el *carácter fundamental* de los molares mamalianos consiste en su concepción según tres series de tubérculos (considerados longitudinalmente) en los molares superiores y en dos series los inferiores. Se pone el hecho en evidencia en los capítulos sucesivos, estableciéndose, en primer lugar, que la base de toda teoría en morfología biológica (es decir animal o vegetal) consiste, esencialmente, en investigar y estudiar las modalidades de *carácter fundamental*; luego que, el estudio de los molares mamalianos conduce a considerar que tal carácter fundamental es poseer tres rangos longitudinales de tubérculos arriba y dos solamente abajo; y finalmente se busca y establece cuál puede ser el arquetipo del molar mamaliano.

El segundo folleto se esfuerza, partiendo de tal arquetipo, en seguir la evolución de los molares en los mamíferos placentarios; se trata de un ensayo, de un boceto, esquema o plan de estudio. Así lo establecen los autores en la *Introducción*. Al final del folleto hay un apéndice bibliográfico relativo a las publicaciones de los dos autores; hermosas láminas ilustran el texto.

Nº 369. — GAMOW (G.). *Cinétique des Réactions Nucléaires*. Folleto de 24 páginas con 3 figuras. Precio 8 francos. 1936.

Es el fascículo XVI de la serie "Exposés de Physique Théorique" dirigida por Luis de Broglie.

Después de recordar las ideas actuales respecto de la estructura del núcleo, considera el autor que la mecánica ondulatoria puede ser empleada para describir los movimientos de las partículas constitutivas. Primero trata las "Transformaciones espontáneas"; luego las "Transformaciones por choques entre dos núcleos".

Nº 382. — BREUIL (H.). *Œuvres d'Art Magdaléniennes* du Laugerie Basse (Dordogne). 32 páginas con 7 figuras; 1936; 7 francos.

El autor es profesor en el Colegio de Francia. El fascículo trae varias comunicaciones del mismo sobre el tema indicado en la carátula, presentadas a la *Société Préhistorique*.

Nº 383. — OCTOBON (E.). *Classifications Néolithiques, avec exemple de Continuité dans la Morphologie des Pièces*. 42 páginas con varias figuras; 1936; 8 francos.

El folleto trae dos artículos del autor; el primero se titula: Trinchetes. Raspadores de muescas simétricas y piezas acompañantes en las industrias de cuarcitas en los países tolosanos. El otro lleva por título: *Con motivo de "Clasificaciones del Neolítico. La oportunidad"*.

Nº 406. — KAHAN (THÉODORE). *Théorie de l'Emission des Rayons Alpha à travers une double barrière de potentiel*. 32 páginas, con 9 figuras. Precio: 12 francos. 1936.

Fascículo XVII de la serie recién mencionada. Primero trata la teoría general del paso de una partícula material al través de una "montaña de potencial", tanto del punto de vista clásico como del de la mecánica ondulatoria. Luego se encara el modelo nuclear de Gamow y la teoría de la radioactividad alfa con una simple barrera de potencial. Finalmente la emisión de rayos alfa al través de un doble umbral de potencial.

Nº 407. — OKKELS (HERALD). *La Glande Thyroïde*. 53 páginas; 13 figuras en el texto y 6 láminas fuera. 1936. Precio: 15 francos.

Fascículo II de la serie "Histophysiologie" dirigida por A. Policard, profesor en la Facultad de Medicina de Lyon. El autor es profesor adjunto de la Facultad de Medicina de Copenhague.

Después de una introducción histórica, se trata sucesivamente la anatomía, bioquímica, fisiología, patología, hipotiroidia, hipertiroidia, preparaciones y *standardización*. Al final, un sumario y un índice bibliográfico.

Entre los datos históricos que se mencionan al comienzo, se establece que el “bocio” fué notado hace 2000 años ya. Su naturaleza endémica fué bien conocida (según un párrafo de Plinio)| Pero solo a fines del siglo XVIII, cuando la anatomía de la tiroides se estableció, es que se reparó en que el bocio era atribuible a una tumefacción de la glándula tiroides.

En 1914, el aislamiento de una sustancia pura conteniendo 65 % de iodo y presentando, cualitativamente al menos, todas las propiedades físicas de la tiroides, fué anunciada por Kendall y llamada por él *tiroxina*. Doce años después más o menos, su composición fué explicada, así como realizada su síntesis, por Harington.

Nº 409. — DESTOUCHES (JEAN-LOUIS). *La Cinétique Opératoirelle*. 72 páginas; 16 francos, 1936.

Constituye el Capítulo I del *Tratado de Mecánica Ondulatoria de los sistemas*, escrito por el autor; y es el fascículo XIX, de la serie “Exposés de Physique Théorique” dirigida por Louis de Broglie.

En un prefacio, este último sabio hace notar que los fundadores de la Mecánica ondulatoria, más preocupados de alcanzar su objeto que de codificar, han expuesto, a menudo, sus ideas con cierta confusión y sin un examen crítico profundizado, de tal suerte que, aun en sus comienzos, tentativas convergentes han parecido opuestas. Vino luego el período de estabilización y su entrada en el dominio de la enseñanza, éste le resultó muy provechoso, afirmando sus principios, fijando su interpretación, etc. Pero aun falta estudiar la estructura lógica del nuevo edificio, señalar, con precisión, a partir de qué instante se introducirá tal o cual concepto, tal o cual postulado, con una exposición racional. Manifiesta que es una tentativa de ese género la inaugurada con el folleto del profesor Destouches, que nos ocupa.

El autor después de una Introducción, trata los siguientes puntos: Papel desempeñado por los *operadores* en mecánica ondulatoria; la reacción de corpúsculo; cinética operatorial de un corpúsculo único; operadores, cinéticos adscriptos a un sistema mecánico; equi-correspondencia y cambios de parámetros; centro de gravedad; conclusión.

Nº 411. — BROGLIE (LOUIS DE). *Nouvelles Recherches sur la Lumière*. Folleto de 56 páginas; precio 12 francos; 1936.

Es el fascículo XX de la serie “Exposés de Physique Théorique” dirigida por el autor.

En el fascículo 181 de la serie general, Broglie expuso las ideas que le habían guiado en su investigación sobre un nuevo concepto de la luz. En este nuevo trabajo profundiza y mejora la teoría entonces expuesta. Trata, primero, las ecuaciones y definiciones generales de la “Teoría de los fotones”. Luego, expone un estudio de los estados del fotón y de los grandores cuadráticos adscriptos a él. Al final trae unos complementos y observaciones.

Nº 412. — ROY (RENÉ). *Contribution aux Recherches Économétriques*. 50 páginas; 10 francos, 1936.

Fascículo I de la serie “Impases économiques”, dirigida por Roberto Gibrat, ingeniero en el cuerpo de minas y doctor en derecho. El autor es profesor de la Escuela Nacional francesa de Puentes y Calzadas.

Esta serie aspira poner en evidencia la necesidad de utilizar, por lo menos en ciertos dominios de la economía política, los métodos habituales de las ciencias. El vocablo "impasse" que adopta se refiere a Francia; pues el director Gibrat, en un prefacio, afirma que la economía política tal cual se encaraba en aquel país hasta hace poco, ya en la enseñanza, ya en las investigaciones, conducía frecuentemente a callejones sin salida por no querer utilizar los recursos de las matemáticas. Cada uno de los fascículos de la serie en cuestión corresponderá a uno de esos atolladeros. El que sale actualmente a luz, del profesor Roy, se refiere a la teoría de los precios. Lo desarrolla en varios párrafos titulados: El pedido de bienes de consumo directo; los conceptos de Cournot en materia de demanda; la elasticidad de la demanda; la ley de Gregory King; la demanda de los productos y servicios monopolizados; el concepto dinámico opuesto al estático de Cournot; investigaciones efectuadas y resultados obtenidos por la escuela americana; conclusiones.

Nº 415. — DÉROBERT (L.) & FAURÉ (J.), *L'Atmosphère viciée des locaux d'Habitation et de Travail. Pathologie. Le Conditionnement de l'Air*. 84 páginas; 1936. Precio: 18 francos.

Fascículo II de la serie « Exposé de Toxicologie et Hygiène Industrielle » dirigida por René Fabre.

En un introito dicen así los autores:

« Hasta hace poco se creía que la viciación de la atmósfera y los trastornos que ella engendra, tenían únicamente por causa la contaminación química y orgánica. Trabajos americanos recientes consideran que esa viciación es específicamente de orden físico: perturbaciones de la temperatura, de la humedad, del movimiento del aire. Ellas producen afecciones agudas o crónicas, siempre graves, e influyen también en los rendimientos intelectual e industrial ».

Las indicaciones de esas experiencias hechas por autores americanos, no han sido seguidas en Europa y los autores creen que puede interesar divulgarlas.

Los puntos que tratan son los siguientes: Atmósferas de los locales habitables y de los talleres. Contaminación de la atmósfera libre respecto de los locales en general. Fisiología. Patología de las variaciones de la temperatura y de la humedad relativa. Legislación. Aire condicionado. Aplicaciones: a los talleres, medicinales, atmósfera de los hospitales. Conclusiones. Bibliografía.

Nº 416. — LAPICQUE (LOUIS), *L'Excitabilité Itérative*. 68 páginas con 12 figuras y dos láminas fuera del texto; 1936. Precio: 18 francos.

Fascículo I de la serie « Physiologie Générale del Système Nerveux », dirigida por el autor, miembro del Instituto de Francia, Profesor en la Sorbona.

En este folleto sólo se expone la Primera Parte que trata la *Introducción y Técnica*, por un lado y la *Adicción latente* por otra. La exposición sigue el siguiente orden: Introducción histórica. Paréntesis para justificar la noción de nervios iterativos. Técnica. La adicción latente; datos experimentales o sea umbral en función del intervalo, influencia de la relación cronológica

entre el estimulante y el objeto, casos del corazón y de un nervio, tiempo de sumación. Consideraciones teóricas o sea comparación con la experiencia, el punto de vista fisicoquímico, sobre la naturaleza del proceso que se suma.

Al final se traen unas referencias bibliográficas. Las láminas reproducen fotografías de los aparatos utilizados: cilindro de Trevet; iterador Walter, etc.

Nº 417-418. — FESSARD (A.), *Propriétés Rythmiques de la Matière Vivante*. Dos folletos respectivamente de 100 páginas, 20 figuras, 3 láminas fuera del texto y 66 páginas, 25 figuras, 3 láminas. Precios: 18 y 12 francos. 1936.

Fascículos II y III de la serie «Physiologie Générale du Système Nerveux», dirigida por Louis Lapicque. El autor es doctor en Ciencias, director adjunto en la Escuela de Altos Estudios.

Los folletos tratan los «nervios aislados», el primero, los «mielinizados», el otro los «no mielinizados».

El autor expone parte de sus investigaciones propias y de las de sus colegas, realizadas durante varios años en el dominio de las propiedades rítmicas de la materia viviente. Trata solo de la actividad periódica observable bajo ciertas condiciones en los nervios aislados. No encara un plan general de los problemas relativos al automatismo celular ni formula hipótesis fisicoquímicas precisas.

Después de una Introducción, varios capítulos desarrollan el tema tanto respecto de las pulsaciones eléctricas en los nervios mielinizados (1er. folleto) como en los no mielinizados (2º folleto). Al final de cada uno se presenta una nutrida bibliografía.

Nº 424. — DUPRÉ LA TOUR (F.), *Le Polymorphisme des acides gras*. 56 páginas. Precio: 14 francos. 1936.

Es el primer fascículo de una serie titulada «Aplicaciones de los rayos X», dirigida por Mauricio de Broglie, de la Academia Francesa y de la de Ciencias. El autor, sacerdote jesuita, es profesor en la Facultad francesa de Medicina de Beyruth.

Se trata de un trabajo original no publicado aún en su conjunto y muchos de los datos que trae son, por decirlo así, enteramente nuevos. El autor dice modestamente que el interés de esos resultados es limitado y que no exagera su alcance; sin embargo cree que los químicos y fisico-químicos pueden sacar algún provecho en torno al conocimiento de ellos.

Después de exponer la posición del problema y los métodos de investigación seguidos, trata los monoácidos, los diácidos de 3 a 9 átomos de carbono, los diácidos superiores «impares» y los «pares». Una Conclusión y una Bibliografía cierran.

Nº 428. — PRETTE (MARCEL), *Réactions en chaînes* (Seconde partie). 80 páginas. Precio: 20 francos. 1936.

Esta segunda parte contiene un estudio cinético de diversas reacciones de combustión y constituye el fascículo X de la serie «Exposés de Chimie Générale et Minérale» dirigida por Paul Pascal. Nos hemos, precedente-

mente, ocupado de la primera parte que trataba la combustión del hidrógeno. Después de recordar el autor lo que dijera al ocuparse de esa primera parte de su trabajo, insistiendo, especialmente, en las características propias de la inflamación a bajas presiones, características que diferencian una reacción de combustión en cadenas, de una reacción homogénea habitual, entra en materia. Su exposición comprende tres partes; en la primera, examina tres reacciones que presentan, en ciertos puntos, vínculos bastante estrechos con la combustión de un gas tonante; la segunda encara el estudio de la combustión del fósforo, del azufre y de los derivados de uno y otro. En la última trata el muy complejo problema de la oxidación de las sustancias orgánicas, particularmente de los hidrocarburos.

Insiste el autor sobre las particularidades que presenta cada combustible, y en señalar las lagunas o las observaciones aún inexplicables.

Al final, las conclusiones y un índice bibliográfico.

Nº 430. — JARRY-GUÉROULT (ROBERT), *Las Rapports limites de l'Ordre et du Libre Arbitre dans l'évolution des Sociétés humaines*. 70 páginas y dos láminas. Precio: 15 francos. 1936.

Fascículo I de la serie titulada « Dynamique Sociale », dirigida por el autor, ingeniero civil de las minas; diplomado en la Escuela libre de Ciencias políticas; Jefe de Servicio técnico de fábrica.

En un primer capítulo se discurre sobre la « Introducción a los métodos de la dinámica social ». Se transcriben muchas ideas de Descartes emitidas en su famoso *Discurso del método*, y otras muchas de Montesquieu, de Karl Marx, Jorge Sorel, Bergson y diversos filósofos y economistas. Al final de esta Introducción define lo que llama Dinámica Social, en los siguientes términos: « La complejidad creciente de las técnicas e incidencias de sus variaciones, sobre la vida de cada hombre, exige que éste, para querer lo acertado, vea acertadamente. Esto permitirá no sólo comprobar con grandes detalles las cadenas de las causas que han llevado a tal o cual crisis, resolución o guerra; sino que también permitirá a todos los escalones de ese contralor de la vida de la ciudad que se llamaba antes *Política*, la *precisión* en la aplicación de la voluntad a los actos de la vida en Sociedad. Tal es la dinámica social ».

Otro capítulo se titula *Las Relaciones límites del orden y del libre albedrío en la evolución de las sociedades humanas. Figuración cartesiana del hecho social*. Las dos láminas se refieren a aplicaciones: Balance de 20 hectáreas de campo de papas en calidad, precio y valores, de acuerdo con una investigación realizada por el « Consejo Nacional Económico » y Relaciones de transformaciones e intercambio entre un campo de papas y diversos.

Nº 438. — HERING (H.), *Disociation de l'Eau en H² et OH*. 28 páginas. Precio 10 francos. 1936.

Fascículo I de la serie « Altas Temperaturas », dirigida por G. Ribaud, de la Sorbona. El autor es doctor en Ciencias y asistente en la Facultad de Ciencias de Estrasburgo.

Trata el tema en cuatro capítulos. El primero se refiere a la existencia del radical OH libre; el segundo trata la disociación térmica, mientras el siguiente se ocupa de la disociación por descarga eléctrica. Finalmente viene la disociación por vapor de mercurio excitado. No falta la bibliografía.

Nº 439. — OMEREDANE (ANDRÉ), *Le Problème des Aptitudes à l'Age Scolaire*. 60 páginas. Precio: 12 francos. 1936.

Fascículo I de la serie « Exposés sur la Psycho-Biologie de l'Enfant », dirigida por Henri Wallon, profesor en el Colegio de Francia y Director del laboratorio de Psicobiología del niño de la Escuela práctica de Altos Estudios. El autor es Director adjunto del referido laboratorio.

El tema está desarrollado en dos capítulos; el primero se ocupa del problema de las aptitudes de los niños; el otro del escolar ante el problema en cuestión.

En una Introducción se trata del problema de la selección, considerado como de actualidad. Dice así: « Entre enero y julio 1935, hemos hecho, en colaboración, una investigación médico-psicológica en una escuela secundaria que se propone recuperar —y en lo posible readaptar— a inadaptados escolares procedentes de liceos y de cursos particulares. Niños todos, juzgados incapaces para seguir los cursos de las clases superiores a aquella de donde salían, por haber fracasado en sus exámenes. Hemos examinado 21 alumnos del punto de vista somático, psiquiátrico y otros. Hemos llevado muy adelante el análisis de los factores individuales de inaptación escolar, análisis que escapa a las investigaciones estadísticas ». En este primer fascículo el autor señala su actitud crítica respecto del problema de las aptitudes en la edad escolar.

Nº 440. — OMBREDANE (ANDRÉ), SUARES (N.) y CANIVET (N.), *Les Inadaptés Scolaires*. 86 páginas. Precio: 12 francos. 1936.

Es el fascículo II de la serie a que pertenece el fascículo I recién mencionado. Los señores N. Suares y N. Canivet, son diplomados del Instituto Jean Jacques Rousseau de Ginebra.

Aquí aparecen tres capítulos titulados, respectivamente: *Una investigación sobre los inadaptados escolares. Observaciones individuales. Los factores de inadaptación escolar.*

Al final, el folleto trae las conclusiones. Estas últimas son siete. Se trata, siempre, de los 21 alumnos referidos en la noticia recién dada, relativa al primer fascículo. Entre esas conclusiones mencionaremos la 5ª: los exámenes escolares constituyen procedimientos muy imperfectos para apreciar, tanto los conocimientos como las capacidades intelectuales. La 3ª establece que no es raro ver niños que tienen éxito brillante en las clases inferiores, servidos por aptitudes de nivel inferior, volverse cada vez menos buenos alumnos en las clases superiores porque la elaboración de los conductos intelectuales más elevados no se realiza normalmente. Inversamente, alumnos mediocres en las clases inferiores pueden volverse buenos en las superiores. Las variaciones individuales del ritmo de la evolución, adquieren aquí toda su importancia.

Nº 441. — LAVERNTIEFF (M.), *Sur les Fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de Polynomes*. Folleto de 64 páginas. Precio: 15 francos. 1936.

Constituye el fascículo V de la serie « La Théorie des Fonctions », dirigida por Paul Montel.

El autor, profesor de la Universidad de Moscú, desarrolla el tema en cinco capítulos. Tras una Introducción, se ocupa de algunas propiedades de la representación conforme; de la función límite; convergencia sobre el continuo y convergencia no uniforme; algunas propiedades de los conjuntos cerrados planos; de las sucesiones convergentes.

En un prefacio hace notar el autor la repercusión que, en el dominio de la teoría de las funciones de una variable compleja, han ejercido los desarrollos de las teorías de los conjuntos y de las funciones de una variable real; los trabajos de Painlevé sobre las ecuaciones diferenciales, ciertos estudios de Borel y de Montel.

Por lo demás, al final, trae una bibliografía del tema tratado o sea del problema de la estructura de las funciones representables por series de funciones analíticas, problema que, al igual que los métodos para resolverlos, permanecen aún intermedios entre la teoría de las funciones de una variable compleja y la de las variables reales.

Nº 443. — DUCLAUX (J.), *Leçons de Chimie Physique, appliquée à la Biologie. VIII. Pression Osmotique I; Partie Expérimentale*. 68 páginas con 35 figuras. Precio: 18 francos. 1936.

Constituye el capítulo III del tomo II de las lecciones de Química-Física del conocido profesor del « Collège de France ».

En noticias anteriores nos hemos ocupado de folletos ya publicados relativos a estas lecciones. En el presente, los temas tratados siguen este orden: La Presión osmótica en físico-química y en biología. Medida directa de las presiones osmóticas: trabajos fundamentales; medidas ocasionales y métodos diversos. Bibliografía.

Todo el estudio de las presiones osmóticas se basa en el concepto de membranas *semi-impermeables*, concepto de origen experimental pero base insignificante con respecto al desarrollo que la teoría le ha dado, pues esa teoría postula, de una manera absolutamente general, la existencia de membranas semiimpermeables que jamás han sido realizadas.

Nº 444. — SCHOEN (M.), *Problèmes d'Asymétrie dans les Processus Biochimiques*. 104 páginas. Precio: 20 francos. 1936.

Constituye el fascículo IV de la serie « Exposés de Chimie Biologique », dirigida por Gabriel Bertrand, miembro del Instituto de Francia y Profesor de la Facultad de Ciencias de París.

Esta exposición tiene su origen en las conferencias dadas por el autor en 1933, en el Instituto de Altos Estudios de Bélgica.

En una Introducción se hace una reseña histórica de la maravillosa historia de la disimetría molecular y de los orígenes de lo que, más tarde, se llamó estereoquímica, ciencia nueva que tomó, luego, un vuelo considerable desbordando ampliamente los marcos de la química propiamente dicha por obra de los físicos, físico-químicos, biólogos, que fueron arrastrados en su estudio.

La primera parte del libro que nos ocupa trata los fenómenos de asimetría en los procesos de degradación; la segunda en los procesos de síntesis; la tercera en los procesos de inmunidad. La cuarta y última se ocupa del destino del carbono asimétrico. Al final, una nómina de los numerosos autores mencionados en la exposición.

Nº 451 y 452. — DENJOY (ARNAUD), *Introduction a la Théorie des Fonctions de variables réelles*. Dos folletos de 60 páginas, cada uno. Precio: 12 francos cada uno. 1937.

Constituyen los fascículos I y II de la serie « Ensembles et Fonctions », dirigida por el autor, profesor de la Sorbona de París.

En la Primera Parte (fascículo 451) trata el Histórico, la Geometría de los conjuntos cartesianos; Funciones; Continuidad y Convergencia; Derivación. En la Segunda parte (fascículo 452), la Integración; Series trigonométricas; Funciones quasi-analíticas; Funcionales y Funciones de conjunto.

En un prefacio expresa el autor lo siguiente: « Los matemáticos considerarán la presente exposición como muy superficial e incompleta, pero me ha parecido que puede servir de guía a los jóvenes estudiantes serios interesados en tener una vista panorámica de las posiciones avanzadas, fruto de las recientes conquistas de las matemáticas, antes de fijar su elección respecto del campo de sus estudios o de sus investigaciones ». En su Introducción, apunta el hecho de que los modelos numéricos discontinuos, no analíticos, son tan satisfactorios como los continuos y, *a fortiori*, que los analíticos; que la función analítica limitaba la ciencia dentro de un mundo artificial y estrecho, de suerte que la operación del paso al límite, conquista esencial de la matemática moderna, hizo estallar los marcos.

Nº 457. — BRILLOUIN (JACQUES), *L'Acoustique et la Construction. Base de la Technique*. 84 páginas con 48 figuras. Precio: 18 francos. 1937.

Fascículo I de la serie « Acoustique du Bâtiment », dirigida por el autor, « ingeniero acústico ».

El contenido de este folleto es de utilidad para los arquitectos, decoradores, empresarios, constructores, etc.

En una Introducción, el autor expone el objeto del trabajo. Manifiesta que muchos de los problemas de la acústica del edificio son demasiados complejos y delicados para ser correctamente resueltos por otro que no sea un técnico especializado; no obstante lo cual, un arquitecto puede adquirir suficientes conocimientos para lo relativo a lo esencial de los problemas corrientes. Habla, luego, de la naturaleza y dificultades de esos problemas, de la naturaleza y plan del libro que nos ocupa. En un primer capítulo trata de la acústica física: generalidades; vibraciones aéreas y de los sólidos. El siguiente expone la acústica fisiológica. Luego se habla de los fenómenos sonoros especiales a los edificios; introducción, acústica interior de una sala, la reverberación; la absorción del sonido.

Nº 458. — LONDON (F.), *Une Conception nouvelle de la supra-conductibilité*. 82 páginas con algunas figuras. Precio: 20 francos. 1937.

Fascículo XXI de la serie « Exposés de Physique Théorique », dirigida por Luis de Broglie.

Se trata de conferencias dadas en inglés por el autor, en el Instituto Poincaré de París, en abril 1935. La versión francesa se debe a los profesores Bauer y Winter. Entre las fechas de las conferencias y la de la publicación de este folleto el autor ha dilucidado la cuestión de la existencia eventual, en los supra conductores, de campos electrostáticos próximos a

la superficie; por cuya causa esta cuestión así dilucidada, aparece también publicada.

En suma el autor expone una teoría macroscópica de la supra conductibilidad. Afirma que, actualmente, se puede demostrar casi rigurosamente que es imposible fundar una teoría de dicha supra conductibilidad sobre las bases admitidas en la teoría electrónica si se interpreta el fenómeno en la forma habitual. La exposición comprende 11 párrafos y, al final, unas referencias.

Nº 473. — LACROUTE (M. P.), *Raies d'Absorption dans les Spectres Stellaires*. 92 páginas. Precio: 20 francos. 1937.

Fascículo I de la serie « Physique Atomique et Spectroscopie », dirigida por Eugenio Bloch, profesor de la Sorbona.

Trata el autor un tema actualmente en plena evolución; es un esfuerzo de clasificación y de sistematización.

Las conclusiones son que el estudio de las formas de las rayas de los espectros estelares ha sido ya muy fructuosa; las observaciones han obligado a las teorías, a considerar más íntimamente los fenómenos que se producen en las atmósferas; ha sido necesario emitir hipótesis, rechazar otras, etc. Casi todas las cuestiones relativas a las físicas estelares han sido completamente renovadas con esos estudios de las formas de las rayas, a saber: composición de las estrellas, sus temperaturas, la agitación de sus atmósferas, la gravedad en sus superficies, sus rotaciones.

Muchos otros progresos cabe esperar; y así, el tratamiento de ionización y de excitación en el seno de la atmósfera en desequilibrio termodinámico, requiere ser precisado. Observaciones más numerosas plantearán siempre nuevos problemas cuyas soluciones requerirán, a menudo, la introducción de nuevas ideas que mejorarán nuestros conocimientos del mundo.

Nº 509 y 510. — LETORT (MAURICE), *Les Conceptions Actuelles du Mécanisme des Réactions Chimiques (Cinétique chimique)*. Dos folletos de 60 y 56 páginas respectivamente. Precios: 15 francos cada uno. 1937.

Constituyen los fascículos XI y XII de la serie « Exposés de Physique Moléculaire », dirigida por Víctor Henri, profesor en la Universidad de Lieja; el autor es « ingeniero químico I. C. P. ».

La primera parte (nº 509) trata las Generalidades y los procesos elementales; la segunda (nº 510) trae el análisis de la Reacción global y las Conclusiones. Se inicia el trabajo con un Prefacio explicativo de Víctor Henri, en el que se hace una breve síntesis histórica del tema. El libro contiene una exposición profundizada de las diversas etapas de la cinética química; trae una bibliografía muy completa y una síntesis del conjunto de nuestros conocimientos; todo en lenguaje claro. El autor, durante cinco años, ha investigado sobre la cinética de la descomposición térmica del aldehído acético gaseoso; ha desarrollado diversos tópicos teóricos que el tema tratado comporta. En la primera parte se pone a la vista, cómo la teoría general de la activación por colisiones explica los procesos elementales: monomolecular, bimolecular y trimolecular.

La segunda parte muestra cómo las concepciones generales precedentes permiten analizar la reacción global, generalmente debida a su mecanismo complejo.

Cada fascículo puede ser leído separadamente.

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MÚSICA

POR A. E. SAGASTUME BERRA

(Continuación *)

42. — Otro principio armónico general, si bien de distinta índole que los anteriores, que nos permite obtener nuevos acordes, es el que llamaremos *principio de sustitución*, y que pasamos a exponer.

A diferencia de los casos anteriores, en que nuestras consideraciones se referían indistintamente a una $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ ó a una gama atemperada $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ (en este último caso la única variación era simplemente limitar el número posible de acordes), debemos ahora referirnos principalmente a una gama atemperada $\Gamma_{\Phi \eta}^{p_1 \dots p_r}$.

El principio general de sustitución puede enunciarse así: *es posible sustituir una nota (o varias, simultáneamente) de un acorde que podamos considerar como perteneciente a $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, por la nota (o respectivamente, las notas) de valor más próximo de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, sea por exceso, sea por defecto, y obtener así lo que llamaremos en general un acorde alterado.*

Para usar de una expresión breve, diremos que una nota se *altera*, en sentido *ascendente* o *descendente*, cuando se la sustituye por la que más se le aproxima dentro de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ por exceso o, respectivamente, por defecto.

Nótese que este concepto es algo más amplio que el ordinario: ordinariamente, la alteración (*cromática*) ascendente (o descendente) significa lo mismo que simboliza el signo #, *sostenido* (o respectivamente, b, *bemol*), mientras que en nuestra definición puede no suceder así. Por ejemplo, en la gama de Ramos Pareja (§ 37) la nota *mi* es la alteración descendente del *fa*, pero no coincide con el *fab*, puede esta última nota no existe. En el fondo, ésto es solo cuestión de nomenclatura de las notas: en el ejemplo citado, nada nos impediría llamar *fab* al *mi*.

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

Un acorde alterado proviene, pues, de la alteración de algunas de las notas que lo componen.

Al enunciar el principio de sustitución, hemos usado la frase «acorde que podamos considerar como perteneciente a $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ » por la siguiente razón: el poliedro atemperante Φ sabemos que es un poliedro a r dimensiones, lo cual quiere decir que el espacio de menor número de dimensiones que lo contiene es precisamente un E_r . Pero nada impide que podamos considerar a ese poliedro «sumergido», por así decir, en un espacio E_s de mayor número de dimensiones ($s > r$); por ejemplo, uno de los trapecios tolemaicos (polígono plano, o sea «poliedro» a 2 dimensiones) podemos considerarlo en el espacio ordinario E_3 , o en un E_4 , E_5 , etc. Esto trae como consecuencia que un acorde mayor, pongamos por caso, de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, pueda considerarse como una parte del acorde perfecto mayor correspondiente de E_s . En este caso, las notas de un acorde mayor $[n_1, n_2, \dots, n_s]$ que no estén situadas en E_r pueden ser sustituidas, según el principio general, por sus alteraciones de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, y obtendremos así un nuevo acorde. En este proceso se ve también cómo difiere del ordinario nuestro concepto de alteración.

A los acordes obtenidos en esta forma, si bien entran en rigor bajo la clasificación de acordes alterados, los llamaremos más especialmente, *acordes imperfectos*, mayores y menores (según sea aquél del que provengan), pues participan en cierto modo de una perfección relativa; a las notas agregadas, provenientes por alteración del acorde $[n_1, \dots, n_s]$, y que no pertenecen al acorde perfecto de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ las llamaremos, por una razón que veremos más adelante, *disonancias características* del acorde.

Reservaremos en cambio más particularmente el nombre de *acordes alterados* (propriadamente dichos) a los que provienen de alteraciones sin salir del espacio E_r , así como a los que combinan esta posibilidad con la anterior.

En cuanto a la notación, para los acordes imperfectos y alterados, haremos las siguientes convenciones: para los acordes provenientes (por sustitución) de acordes mayores, continuaremos usando los corchetes $[]$; para los provenientes de acordes menores, las llaves $\{ \}$. Dentro de esos corchetes o llaves colocaremos, si se trata de acordes alterados propriadamente dichos, las coordenadas de la nota fundamental del acorde original, agregando en la coordenada que corresponda a la nota alterada ⁽¹⁾, una línea — en su

(1) Téngase presente que, a partir de la nota fundamental, la dirección de cada uno de los ejes, o de los vectores unitarios, determina unívocamente otra de las notas del acorde.

parte superior si se trata de alteración ascendente, y en su parte inferior si es descendente. Si la nota fundamental es también alterada, una línea análoga abarcará todo el corchete o llave.

Si se trata de acordes imperfectos o alterados que combinan ambas posibilidades, será necesario indicar además, dentro de un paréntesis ordinario, los armónicos que corresponden a las dimensiones «extra», con análogos símbolos para las alteraciones. Recuérdese, pues, que los números encerrados en estos últimos paréntesis indican *nuevos armónicos*, a diferencia de los otros, que indican *coordenadas*.

Veamos algunos ejemplos.

Refirámonos a un caso más o menos familiar a los músicos: el de la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$ de Tolomeo o de Zarlino cromática (§ 26).

Del acorde mayor $[6, 2]$, o sea el formado por las notas

$$\gamma_{6,2}^{3,5} = \text{mi}\flat, \gamma_{6,3}^{3,5} = \text{sol}, \gamma_{7,2}^{3,5} = \text{si}\flat$$

se obtienen los siguientes acordes alterados propiamente dichos:

$$\begin{aligned} [\overline{6}, 2] &= \text{mi} - \text{sol} - \text{si}\flat & ; & \quad [6, \underline{2}] = \text{re}\# - \text{sol} - \text{si}\flat \\ [\overline{6}, 2] &= \text{mi}\flat - \text{sol} - \text{si} & ; & \quad [\underline{6}, 2] = \text{mi}\flat - \text{sol} - \text{la}\# \\ [6, \overline{2}] &= \text{mi}\flat - \text{sol}\# - \text{si}\flat & ; & \quad [6, \underline{2}] = \text{mi}\flat - \text{sol}\flat - \text{si}\flat = \{7, 2\} \\ [\overline{\overline{6}}, 2] &= \text{mi} - \text{sol} - \text{si} = \{6, 4\} & ; & \quad [\underline{\underline{6}}, 2] = \text{re}\# - \text{sol} - \text{la}\# \\ &\text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

y, si consideramos el plano tolemaico sumergido en el espacio E_3 , cuya tercera coordenada corresponda al armónico 7 ($\log_2 7 = 2,80735$), los siguientes acordes imperfectos mayores:

$$[6, 2 (\overline{7})] = \text{mi}\flat - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{re}\flat \quad ; \quad [6, 2 (\underline{7})] = \text{mi}\flat - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{do}\#,$$

y los alterados siguientes:

$$\begin{aligned} [\overline{6}, 2 (\overline{7})] &= \text{mi} - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{re}\flat & ; & \quad [\underline{6}, 2 (\underline{7})] = \text{re}\# - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{do}\# \\ [\overline{6}, 2 (\underline{7})] &= \text{mi} - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{do}\# & ; & \quad [\underline{\underline{6}}, 2 (\overline{7})] = \text{re}\# - \text{sol} - \text{si}\flat - \text{re}\flat \\ &\text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Si consideramos el espacio E_4 , con un eje más, correspondiente, por ejemplo, al armónico 11 ($\log_2 11 = 3,45943$) tendríamos combinaciones como éstas:

$$[6, 2 (\bar{7}, \bar{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la-si}\flat\text{-re}\flat \quad ; \quad [6, 2 (\underline{7}, \underline{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la}\flat\text{-si}\flat\text{-do}\sharp \\ \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.}$$

Análogamente, del acorde menor $\{5, 4\}$, formado por las notas

$$\gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi}, \gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do}, \gamma_{4,4}^{3,5} = \text{la}$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \{\bar{5}, 4\} &= \text{fa}\flat\text{-do-la} & ; & \quad \{\bar{5}, 4\} = \text{mi}\flat\text{-do-la} \\ \{\bar{\bar{5}}, 4\} &= \text{mi-do-la}\sharp & ; & \quad \{\bar{5}, 4\} = \text{mi-do-la}\flat \\ \{5, \bar{4}\} &= \text{mi-do}\sharp\text{-la} = [4, 4] & ; & \quad \{5, \underline{4}\} = \text{mi-si}\sharp\text{-la} \\ \{\bar{\bar{5}}, 4\} &= \text{fa}\flat\text{-do-la}\sharp & ; & \quad \{\underline{\bar{5}}, 4\} = \text{mi}\flat\text{-do-la}\flat = [5, 2] \\ &\text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

los acordes imperfectos

$$\begin{aligned} \{5, 4 (\bar{7})\} &= \text{mi-do-la-sol}\flat & ; & \quad \{5, 4 (\underline{7})\} = \text{mi-do-la-fa}\sharp \\ \{5, 4 (\bar{7}, \bar{11})\} &= \text{mi-do-si-la-sol}\flat & ; & \quad \{5, 4 (\underline{7}, \underline{11})\} = \text{mi-do-si}\flat\text{-la-fa}\sharp \\ &\text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

y los alterados

$$\begin{aligned} \{\bar{5}, 4 (\bar{7})\} &= \text{fa}\flat\text{-do-la-sol}\flat & ; & \quad \{\bar{5}, 4 (\underline{7})\} = \text{mi}\flat\text{-do-la-fa}\sharp \\ \{\bar{\bar{5}}, 4 (\bar{7})\} &= \text{mi-do-la}\sharp\text{-sol}\flat & ; & \quad \{\underline{\bar{5}}, 4 (\underline{7})\} = \text{mi-do-la}\flat\text{-fa}\sharp \\ &\text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Por ejemplo, el acorde $\{5, 4 (\bar{7})\}$ se forma tomando el acorde menor tolemaico $\{5, 4\} = \text{mi-do-la}$ y agregándole la disonancia característica proveniente del armónico 7. Como $\log_2 7 = 2,80735$, si lle-

vamos a partir del punto $(5, 4)$ correspondiente a la nota *mi*, y en sentido negativo (por tratarse de un acorde menor) el vector unitario correspondiente al tercer eje, obtendremos el tetraedro de E_3 correspondiente al acorde perfecto menor. La nota obtenida tiene el valor $F (\gamma_{5,4}^{3,5} - 2,80735) = 0,51458$ (pues $\gamma_{5,4}^{3,5} = 0,32193$) y está comprendida (véase la tabla del § 26) entre *fa#* y *solb*. Luego: $\{5, 4(\overline{7})\} = \text{mi-do-la-solb}$; y si se tratara en cambio de $\{5, 4(7)\}$ obtendríamos *mi-do-la-fa#*. Sirva este ejemplo para los casos análogos.

43. — Son de interés algunas observaciones sobre los acordes así obtenidos. En primer lugar, en los ejemplos hemos visto que las alteraciones en un acorde pueden llevarlo a coincidir con otro, como en los casos $[\overline{6}, 2] = \{6, 4\}$, $[6, \underline{2}] = \{7, 2\}$, $\{5, \overline{4}\} = [4, 4]$, $\{\underline{5}, 4\} = [5, 2]$. Hay, sin embargo, una diferencia *conceptual* entre ambas *acepciones* del acorde. Tomemos, para fijar las ideas, el caso $[6, \underline{2}] = \{7, 2\}$. En la acepción $[6; \underline{2}]$ se trata de un acorde alterado, pero que *no deja de representar* el acorde *mayor* de donde proviene; en cambio, en la otra acepción, $\{7, 2\}$, se trata de un acorde *menor* por esencia, y que no puede por tanto representar en ningún caso un acorde mayor. Dicho de otro modo: los dos acordes, compuestos de las mismas notas, desempeñan *funciones* muy distintas. El acorde $\{7, 2\}$ es, por definición, perfectamente *consonante*, mientras que el $[6, \underline{2}]$ presenta solo lo que se llama una *consonancia aparente*. Estas observaciones se complementan con las que van a continuación, y que se refieren más especialmente a los acordes imperfectos.

Un acorde imperfecto está constituido por dos clases de notas: en primer lugar, las que corresponden al acorde tonal de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ que son todas consonantes por definición, puesto que admitimos, al construir la gama, la consonancia de los armónicos $p_1, p_2, \dots, p_r$; en segundo lugar, las notas agregadas, que hemos llamado *disonancias características*. Estas son notas también de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, disonantes (pues no responden a los principios armónicos en que nos basamos) pero que sin embargo representan, lo más exactamente posible, a otras notas consonantes no pertenecientes a $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$; y decimos consonantes, porque corresponden a otros armónicos $p_{r+1}, \dots, p_s$ con los que podríamos ampliar la $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$. Tomemos un ejemplo muy simple: la gama de Pitágoras $\Gamma_{(0,11)}^3$ (§ 22); un acorde mayor de ella es, por ejemplo, $[1] = \text{do-sol (Pit.)}$. Consideremos

ahora el segmento $(0, 11)$ que representa a esta gama, colocado en un plano, paralelamente al eje n_1 de coordenadas, sobre el que se representa el armónico 3; el otro eje coordenado n_2 , sea el que representa el armónico 5. Más precisamente, coloquemos nuestro segmento sobre el reticulado de la figura 7, paralelamente al eje n_1 , y de modo que el punto representativo de $\gamma_1^3 = \text{do (Pit.)}$ coincida con el punto $(5, 3)$, que representa precisamente la nota $\gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do (Tol. cr.)}$. Entonces se tendrá que $\text{do (Pit.)} = \text{do (Tol. cr.)} = 0,00000 \omega$; y también $\gamma_{6,3}^{3,5} = \gamma_2^3 = \text{sol (Pit.)} = \text{sol (Tol. cr.)} = 0,32193 \omega$. En cambio la nota $\gamma_6^3 = \gamma_{10,3}^{3,5} = \text{mi (Pit.)} = 0,33985 \omega$ no coincide con la $\gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi (Tol. cr.)} = 0,32193 \omega$, sino que difieren precisamente en una *coma* (*Tol.*) $= 0,01792 \omega$. El acorde perfecto mayor $[5, 3] = \text{do-mi-sol (Tol. cr.)}$ da origen a los acordes imperfectos mayores de la gama pitagórica $[1 \text{ (5)}] = \text{do-mi-sol (Pit.)}$ y $[1 \text{ (5)}] = \text{do-re\#-sol (Pit.)}$, en los cuales las notas *mi* (*Pit.*), *re\#* (*Pit.*) son disonancias características, provenientes de la sustitución del *mi* (*Tol. cr.*) consonante, por sus alteraciones ascendente y descendente respectivamente.

De esta manera se explica la formación del acorde ordinariamente llamado de *séptima de dominante*, por ejemplo *do-mi-sol-si $\flat$* para el tono de fa. Aquí el *si $\flat$* es una disonancia característica, que representa a la nota consonante *te* de la gama de Domínguez Berrueta, en la que *do-mi-sol-te* es el acorde perfecto mayor. Y análogamente, tienen explicación de esta manera otros acordes que la música actual utiliza más o menos frecuentemente, y que revelan armónicos más elevados, de los que, por alteración, resultan ciertas notas componentes.

44. — Consideremos ahora un acorde mayor cualquiera $[n_1, \dots, n_r]$ de $\Gamma^{p_1, \dots, p_r}$. Este acorde está compuesto, como sabemos, de las $r + 1$ notas

$$\gamma_{n_1, \dots, n_r} \quad , \quad \gamma_{n_1 + 1, n_2, \dots, n_r} \quad , \quad \gamma_{n_1, n_2 + 1, \dots, n_r} \quad , \quad \dots \quad , \quad \gamma_{n_1, n_2, \dots, n_r + 1}$$

(habiendo escrito por brevedad $\gamma_{n_1 \dots n_r}$ en lugar de $\gamma_{n_1}^{p_1} \dots \gamma_{n_r}^{p_r}$, etc., lo que no trae confusión alguna). Propongámonos el problema de determinar un acorde menor $\{m_1, \dots, m_r\}$ tal que, de las notas que componen este último, o sea:

$$\gamma_{m_1, \dots, m_r} \quad , \quad \gamma_{m_1 - 1, m_2, \dots, m_r} \quad , \quad \gamma_{m_1, m_2 - 1, \dots, m_r} \quad , \quad \dots \quad , \quad \gamma_{m_1, m_2, \dots, m_r - 1}$$

coincida con las anteriores el máximo número posible de ellas (naturalmente, sin tener en cuenta el orden en que han sido escritas).

y los que están en el caso c ($h \neq k$), o sea que dos de las m_i son una unidad mayores que las n_i correspondientes, son

$$\begin{aligned} & \{n_1 + 1, n_2 + 1, n_3, n_4, \dots, n_{r-1}, n_r\} \\ & \{n_1 + 1, n_2, n_3 + 1, n_4, \dots, n_{r-1}, n_r\} \\ & \{n_1 + 1, n_2, n_3, n_4 + 1, \dots, n_{r-1}, n_r\} \\ & \dots \dots \dots \\ & \{n_1 + 1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{r-1}, n_r + 1\} \\ & \{n_1, n_2 + 1, n_3 + 1, n_4, \dots, n_{r-1}, n_r\} \\ & \dots \dots \dots \\ & \{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_{r-1} + 1, n_r + 1\}, \end{aligned}$$

y son en total $(r-1) + (r-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{r(r-1)}{2}$.

Estos acordes, que presentan con el dado el número máximo posible de coincidencias, se llaman los *acordes relativos* de $[n_1, \dots, n_r]$. Su número total será, pues:

$$r + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{2r + r(r-1)}{2} = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Por el principio de dualidad, dado un acorde menor $\{m_1, \dots, m_r\}$, podrán hallarse también $\frac{r(r+1)}{2}$ acordes relativos, mayores, que serán los siguientes:

$$\begin{aligned} & [m_1 - 1, m_2, m_3, \dots, m_r] \\ & [m_1, m_2 - 1, m_3, \dots, m_r] \\ & \dots \dots \dots \\ & [m_1, m_2, m_3, \dots, m_r - 1] \\ & [m_1 - 1, m_2 - 1, m_3, \dots, m_{r-1}, m_r] \\ & [m_1 - 1, m_2, m_3 - 1, \dots, m_{r-1}, m_r] \\ & \dots \dots \dots \\ & [m_1 - 1, m_2, m_3, \dots, m_{r-1}, m_r - 1] \\ & [m_1, m_2 - 1, m_3 - 1, \dots, m_{r-1}, m_r] \\ & \dots \dots \dots \\ & [m_1, m_2, m_3, \dots, m_{r-1} - 1, m_r - 1]. \end{aligned}$$

Los acordes relativos de uno dado, por presentar el máximo número posible de notas comunes con el acorde dado, presentarán un cierto parentesco o afinidad con él, y de ahí su importancia.

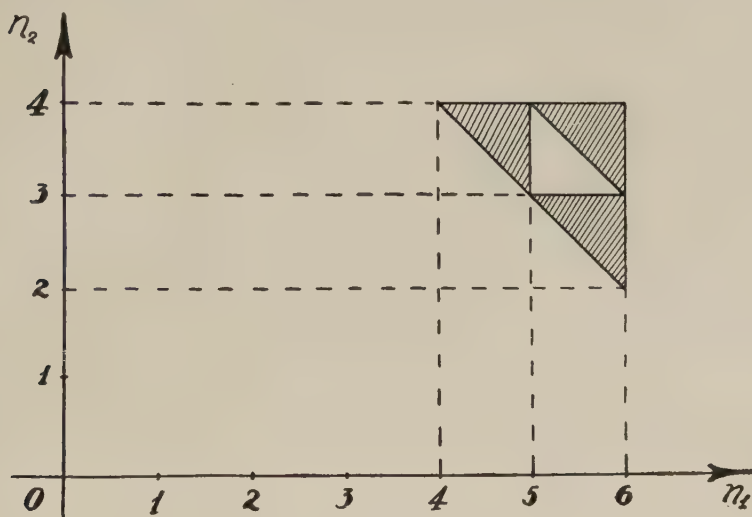


Fig. 12

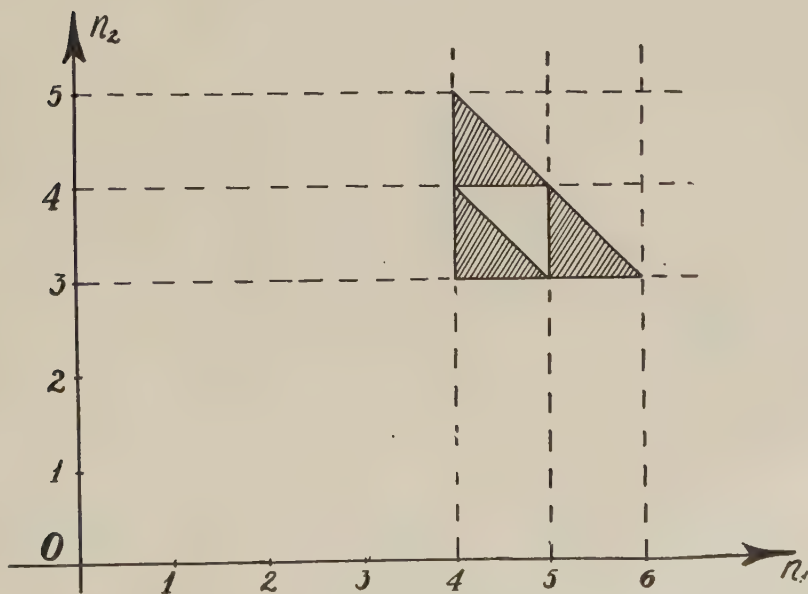


Fig. 12 bis

Ejemplos.—Tomemos, como caso más familiar a los músicos, la gama tolemaica (cromática) y en ella el acorde mayor $[5, 3] = \text{do-}$

mi-sol (ver fig. 7), compuesto por las notas: $\gamma_{5,3}^{3,5} = \text{do}$, $\gamma_{6,3}^{3,5} = \text{sol}$, $\gamma_{5,4}^{3,5} = \text{mi}$. El triángulo que forman estas notas está representado, sin rayar, en la figura 12. Los tres triángulos rayados corresponden en cambio a los tres acordes menores relativos (pues siendo $r = 2$ es $\frac{r(r+1)}{2} = 3$), o sea: $\{6,3\} = (\gamma_{6,3}^{3,5}, \gamma_{5,3}^{3,5}, \gamma_{6,2}^{3,5}) = \text{sol-do-mi}\flat$; $\{5,4\} = (\gamma_{5,4}^{3,5}, \gamma_{4,4}^{3,5}, \gamma_{5,3}^{3,5}) = \text{mi-la-do}$; $\{6,4\} = (\gamma_{6,4}^{3,5}, \gamma_{5,4}^{3,5}, \gamma_{6,3}^{3,5}) = \text{si-mi-sol}$.

Dualmente, la figura 12 bis representa los acordes relativos del acorde menor $\{5,4\} = \text{mi-la-do}$, que son: $[4,4] = (\gamma_{4,4}^{3,5}, \gamma_{5,4}^{3,5}, \gamma_{4,5}^{3,5}) = \text{la-mi-do}\sharp$; $[5,3] = (\gamma_{5,3}^{3,5}, \gamma_{6,3}^{3,5}, \gamma_{5,4}^{3,5}) = \text{do-sol-mi}$; $[4,3] = (\gamma_{4,3}^{3,5}, \gamma_{5,3}^{3,5}, \gamma_{4,4}^{3,5}) = \text{fa-do-la}$.

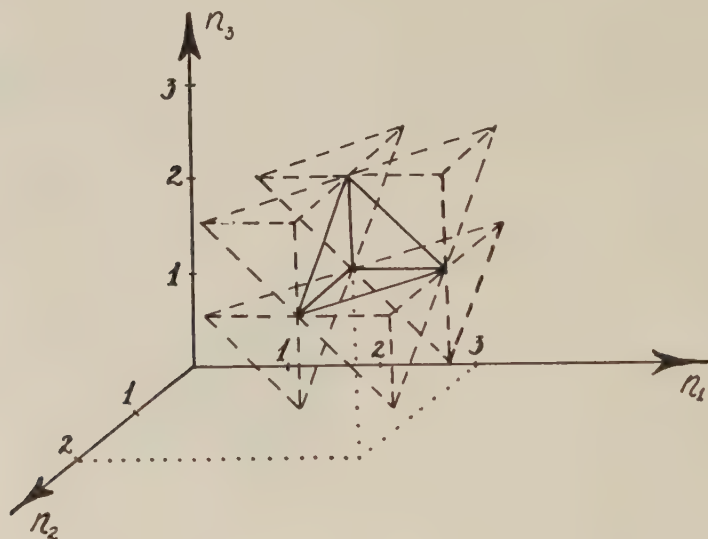


Fig. 13

El caso de la $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$ de Domínguez Berrueta es también interesante. En la figura 13 hemos dibujado en línea llena, el tetraedro correspondiente al acorde mayor $[3, 2, 2]$, o sea:

$$[3, 2, 2] = (\gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,3}^{3,5,7}) = \text{do-mi-sol-te}$$

En líneas de puntos se han dibujado los tetraedros de los acordes relativos, en total $(r=3) \frac{3(3+1)}{2} = 6$, y que son:

$$\{4, 2, 2\} = \left(\gamma_{4,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,1,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,1}^{3,5,7} \right) = \text{sol-do-mi}\flat?$$

$$\{3, 3, 2\} = \left(\gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,1}^{3,5,7} \right) = \text{mi-la-do-sol}\flat$$

$$\{3, 2, 3\} = \left(\gamma_{3,2,3}^{3,5,7}, \gamma_{2,2,3}^{3,5,7}, \gamma_{3,1,3}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7} \right) = \text{te-re}\sharp\text{-fa}\sharp\text{-do}$$

$$\{4, 3, 2\} = \left(\gamma_{4,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,3,1}^{3,5,7} \right) = \text{si-mi-sol-re}\flat$$

$$\{4, 2, 3\} = \left(\gamma_{4,2,3}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,3}^{3,5,7}, \gamma_{4,1,3}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,2}^{3,5,7} \right) = ?\text{-te-do}\sharp\text{-sol}$$

$$\{3, 3, 3\} = \left(\gamma_{3,3,3}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,3}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,3}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7} \right) = ?\text{-?}\text{-te-mi}$$

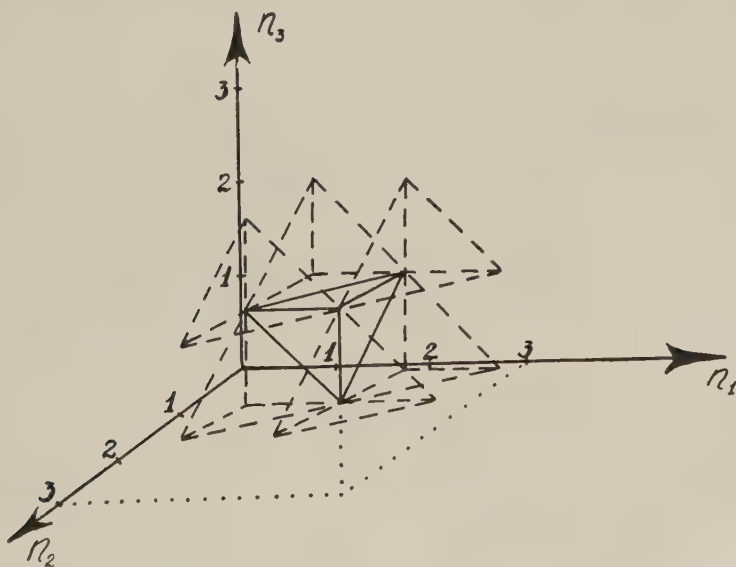


Fig. 13 bis

En la atemperación de Domínguez Berrueta no existen las notas $\gamma_{4,2,1}^{3,5,7}$, $\gamma_{4,2,3}^{3,5,7}$, $\gamma_{3,3,3}^{3,5,7}$ y $\gamma_{2,3,3}^{3,5,7}$; por esta razón las hemos designado con «?». Si se quisieran completar los acordes relativos, ha-

bría que tomarlos alterados, y lo más próximos posibles a los originales. Es decir que, teniendo en cuenta que

$$\gamma_{4,2,1}^{3,5,7} = 0,79106 \omega ; \gamma_{4,2,3}^{3,5,7} = 0,40577 \omega ; \gamma_{2,3,3}^{3,5,7} = 0,55777 \omega$$

$$\gamma_{3,3,3}^{3,5,7} = 0,14273 \omega ,$$

tendríamos que reemplazar

$$\{4, 2, 2\} \quad \text{por} \quad \{4, 2, \bar{2}\} = \text{sol-do-mi}\flat\text{-te}$$

$$\{4, 2, 3\} \quad \text{»} \quad \{\overline{4, 2, 3}\} = \text{fa-te-do}\#\text{-sol}$$

$$\{3, 3, 3\} \quad \text{»} \quad \{\underline{3, 3, 3}\} = \text{re}\flat\text{-sol}\flat\text{-te-mi} .$$

Análogamente, en la figura 13 bis se ha dibujado el tetraedro correspondiente al acorde menor $\{3, 3, 2\} = (\gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,1}^{3,5,7}) = \text{mi-la-do-sol}\flat$ en línea llena, y en líneas punteadas los correspondientes a los acordes relativos, que son los que se indican a continuación, con las sustituciones o alteraciones correspondientes:

$$[2, 3, 2] = (\gamma_{2,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,4,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,3}^{3,5,7}) = \text{la-mi-?-?-} ;$$

$$[2, \bar{3}, 2] = \text{la-mi-do}\#\text{-sol}\flat$$

$$[3, 2, 2] = (\gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,3}^{3,5,7}) = \text{do-sol-mi-te}$$

$$[3, 3, 1] = (\gamma_{3,3,1}^{3,5,7}, \gamma_{4,3,1}^{3,5,7}, \gamma_{3,4,1}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,2}^{3,5,7}) = \text{sol}\flat\text{-re}\flat\text{-?-mi} ;$$

$$[3, \underline{3}, 1] = \text{sol}\flat\text{-re}\flat\text{-si}\flat\text{-mi}$$

$$[2, 2, 2] = (\gamma_{2,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,2}^{3,5,7}, \gamma_{2,2,3}^{3,5,7}) = \text{fa do-la-re}\#$$

$$[2, 3, 1] = (\gamma_{2,3,1}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,1}^{3,5,7}, \gamma_{2,4,1}^{3,5,7}, \gamma_{2,3,2}^{3,5,7}) = \text{?-sol}\flat\text{-?-la} ;$$

$$[2, \bar{3}, 1] = \text{si-sol}\flat\text{-mi}\flat\text{-la}$$

$$[3, 2, 1] = (\gamma_{3,2,1}^{3,5,7}, \gamma_{4,2,1}^{3,5,7}, \gamma_{3,3,1}^{3,5,7}, \gamma_{3,2,2}^{3,5,7}) = \text{?-?-sol}\flat\text{-do} ;$$

$$[\bar{3}, 2, 1] = \text{re-te-sol}\flat\text{-do} .$$

45. — Será útil en este punto confrontar nuestro concepto de *consonancia* de un acorde, o por mejor decir, la explicación teórica que damos de la consonancia, con otra que se ha propuesto, a nuestro juicio erróneamente.

Según nuestro concepto, es *consonante* un acorde fundado exclusivamente en las propiedades armónicas de una gama. Ya hemos explicado (§ 11) por qué una nota cualquiera, que suene simultáneamente con sus armónicos inmediatos, nos produce una impresión de un todo homogéneo, una verdadera consonancia, hasta en el sentido etimológico de la palabra. De ahí que, al admitir como armónicos primarios de una $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ los números primos $p_1, \dots, p_r$, debemos admitir como consonantes con una nota cualquiera, o sea como sonidos acústicamente más afines con ella, aquellas otras notas que representen, directa o indirectamente, sus armónicos $p_1, \dots, p_r$ y solo ellas. Si esas notas representan directamente esos armónicos, es decir, si tomamos aquellas notas que, a partir de la nota dada, constituyen sus armónicos $p_1, \dots, p_r$, obtenemos precisamente el acorde perfecto mayor. Si en cambio la representación es indirecta, es decir, si tomamos aquellas notas de las cuales la nota dada es el armónico $p_1, \dots, p_r$, obtenemos el acorde perfecto menor. Así pues, según este concepto, los únicos acordes estrictamente consonantes son el perfecto mayor y el menor (aquel más directamente consonante que éste) o bien fracciones o partes de ellos.

Ahora bien: observando lo que ocurre en la gama pitagórica o tolemaica, se ha creído encontrar la explicación de la consonancia de los acordes ⁽¹⁾ basándose en el fenómeno de los *sonidos diferenciales* o *de Tartini*, descubiertos por el alemán Sorge, y estudiados por el insigne violinista cuyo nombre llevan, y que pasamos a explicar.

Cuando producimos simultáneamente dos sonidos de frecuencias v_1, v_2 , y dentro de ciertas condiciones, se puede escuchar también un tercer sonido cuya frecuencia es la *diferencia* $v_2 - v_1$ de las frecuencias de aquéllos, y que por esta razón se llama *sonido diferencial* o también *sonido de Tartini*. Por ejemplo, si las notas son una *la* normal, de frecuencia 435 y el *do* inmediato bajo, de frecuencia 261, el sonido de Tartini tiene la frecuencia $435 - 261 = 174 = 261 \times \frac{2}{3}$, y representa por tanto el *fa* de la octava inmediatamente inferior.

Este sonido diferencial es un *verdadero* sonido; no es una ilusión de nuestro oído, como puede comprobarse experimentalmente de varias maneras; en especial, es perfectamente capaz de interferir con otros sonidos, y también de dar nuevos sonidos diferencia-

(1) Véase, por ej. BLASERNA y HELMHOLTZ (I).

les con las notas primarias o con otros sonidos diferenciales. Se tienen así sonidos diferenciales de 1º, 2º, 3º, ..., orden.

La explicación teórica de estos sonidos no es nada sencilla ⁽¹⁾, pero aquí lo único que nos interesa es la manera « aritmética » como se originan, y que se resume diciendo que dos sonidos se componen por diferencia, en cuanto a sus frecuencias, para dar un sonido diferencial de un orden una unidad mayor que el máximo de los órdenes de los componentes.

Cuando ejecutamos un acorde (de dos notas por lo menos) debemos, por consiguiente, tener en cuenta que el acorde no se compone sólo de esas notas, sino que ellas van acompañadas de todo un cortejo de frecuencias dadas por los sonidos de Tartini de los distintos órdenes.

Observemos ahora lo que ocurre con los acordes más usuales y conocidos. Tomemos como primer ejemplo el acorde pitagórico *do-sol*. Si el *do* tiene una frecuencia v , el *sol* inmediato tiene una frecuencia $\frac{3}{2}v$, o sea que ambas frecuencias están en la relación

de 1 a $\frac{3}{2}$, o también (multiplicando por 2 ambos números) que

ellas son proporcionales a los números 2 y 3. El sonido diferencial de 1º orden estará representado (con el mismo factor de proporcionalidad) por el número $3 - 2 = 1$, y los sonidos de Tartini de 2º orden por los números: $3 - 1 = 2$, $2 - 1 = 1$. Como 1 y 2 ya están entre los sonidos originales o los de 1º orden, se sigue que los sonidos de orden 3º, 4º, ..., serán los mismos. Luego, en este caso, el « cortejo » de frecuencias se compone de los números 1, 2 y 3 solamente. Entre ellos, las notas originales del acorde son las 2 y 3, y el nuevo sonido 1 *representa la octava baja de una de las notas del acorde* (el 2) o sea el *do* de la octava grave inmediata.

Tomemos otro ejemplo: el acorde tolemaico *do-mi-sol*. Si v es la frecuencia del *do*, el *mi* tiene la frecuencia $\frac{5}{4}v$, y el *sol*, como antes $\frac{3}{2}v$. Multiplicando estos números por el mínimo común múltiplo de los denominadores, que es 4, y suprimiendo el factor común v , resulta el *do* representado por 4, el *mi* por 5, el *sol* por 6.

(1) Ver Lord RAYLEIGH (XIII) vol. II.

Los sonidos de Tartini son:

De 1^{er} orden: $6 - 4 = 2$; $5 - 4 = 1$; $6 - 5 = 1$;

De 2^o orden: $6 - 2 = 4$; $5 - 2 = 3$; $4 - 2 = 2$; $6 - 1 = 5$;
 $5 - 1 = 4$; $4 - 1 = 3$; $2 - 1 = 1$;

De 3^{er} orden: $6 - 3 = 3$; $5 - 3 = 2$; $4 - 3 = 1$; $3 - 2 = 1$;
 $3 - 1 = 2$.

Al calcular los sonidos de 1^{er} orden, obtenemos dos frecuencias nuevas: 1 y 2; combinando éstas con las notas originales o entre sí, obtenemos los sonidos de 2^o orden, de los cuales uno solo nuevo: el 3. Por tanto, para obtener los sonidos de 3^{er} orden nuevos, solo es necesario combinar este 3 con las notas originales y las de 1^o y 2^o orden; y se observa que no aparece ninguna frecuencia nueva. Es por eso que hemos detenido el proceso, pues evidentemente, entre los sonidos diferenciales de 4^o orden no vamos a obtener nada nuevo, y tanto menos con los de órdenes superiores.

El acorde do-mi-sol da así origen a las seis frecuencias: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Las tres últimas son las notas originales del acorde; la frecuencia 3 es la octava baja de la 6, o sea el sol; la 2, la octava baja del do; y la 1, la octava baja del 2, es decir, la doble octava baja del 4. *Los sonidos del conjunto representan*, también en este caso, *los sonidos originales o sus octavas o dobles octavas bajas*.

Si analizamos desde el mismo punto de vista un acorde tal como el *do-mi-sol-si^b* (*Tol. cr.*) (considerado como *disonante*, por oposición a los anteriores, todos *consonantes* según la clasificación usual) tendremos que las frecuencias son ahora proporcionales a $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{16}{9}$, o bien multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores, proporcionales a 36, 45, 54 y 64. Por tanto, los sonidos de Tartini de 1^{er} orden son:

$45 - 36 = 54 - 45 = 9$; $54 - 36 = 18$; $64 - 36 = 28$; $64 - 45 = 19$; $64 - 54 = 10$

y, sin necesidad de ir más lejos, observamos que aparecen aquí frecuencias tales como 10, 19 ó 28, *que no representan octavas de ninguno de los sonidos originales*. Naturalmente, lo mismo ocurrirá con los sonidos diferenciales de órdenes más elevados.

46. — De acuerdo con lo que ocurre en estos casos, se ha creído encontrar la explicación de la consonancia o disonancia de un acorde, en el estudio de los sonidos diferenciales. Se ha dicho: un acorde es consonante cuando sus sonidos diferenciales son solo las notas originales o sus octavas, y disonante en caso contrario.

Nuestra opinión es bien distinta: son consonantes aquellos acordes fundados en las propiedades armónicas (o acústicas) de la gama, es decir, solamente los acordes perfectos mayor y menor, y disonantes todos los demás. Bien entendido que estos acordes mayor y menor deben ser formados como ya ha sido explicado en los §§ 39 y 40, y en consecuencia, este concepto es más amplio que el usual.

Según esta opinión, son efectivamente consonantes los acordes do-sol (Pit.) y do-mi-sol (Tol.), y no lo es el acorde do-mi-sol-si $\flat$ (Tol. cr.). Este último es un acorde imperfecto $[5, 3\overline{7}]$, proveniente del acorde perfecto mayor $[3, 2, 2]$ de la $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$ de Domínguez Berrueta, o sea do-mi-sol-te. El si $\flat$ (Tol. cr.) es lo que hemos llamado una *disonancia característica*, y proviene de la nota te (D. B.) = $0,80736 \omega$ (véase la tabla del § 33) que es aproximado, en la gama Tolemaica cromática, por el si $\flat$ (Tol. cr.) = $0,84801 \omega$ (ver la tabla § 26).

El acorde do-mi-sol-te es consonante también en el otro sentido, pues las frecuencias de las notas originales son proporcionales a $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$, o sea 4, 5, 6, y 7, y se ve entonces que los sonidos diferenciales de los distintos órdenes no dan, aparte de las frecuencias originales, más que los números 1, 2 y 3, todos ellos octavas bajas de notas del acorde.

Por brevedad, permítasenos por un momento llamar *asonantes* a los acordes tales que sus sonidos diferenciales representen solamente notas de entre las originales del acorde, trasladadas en una o más octavas. Reservamos, en cambio, el nombre de *estrictamente consonantes* para los acordes que responden a nuestro concepto, tal como fué explicado en los §§ 39 y 40, y *consonantes* a los acordes que en el concepto usual, bastante vago, «suenan bien», según lo juzgaría un músico o persona cualquiera con disposición musical.

Hemos visto, pues, tres ejemplos de acordes menores que una octava, que son a la vez estrictamente consonantes y asonantes. Ellos son: el do-sol (Pit.) = do-sol (Tol.) = do-sol (D. B.); el do-mi-sol (Tol.) = do-mi-sol (D. B.); y el do-mi-sol-te (D. B.), o sea, los acordes mayores de las gamas de Pitágoras, Tolomeo y Domínguez

Berrueta, respectivamente. Entre otras cosas, demostraremos en lo que sigue que éstos son los únicos que tengan esa propiedad; es decir, que un acorde menor que una octava y que sea la vez estrictamente consonante y asonante debe ser necesariamente uno de los acordes mayores de las gamas de Pitágoras, Tolomeo o Domínguez Berrueta.

Esto ya nos da un primer argumento en contra de la explicación de la « consonancia » por medio de los sonidos de Tartini. En efecto, ningún músico dudará en clasificar como consonante, en el sentido corriente, un acorde menor tolemaico, por ejemplo el la-do-mi.

Las frecuencias son aquí proporcionales a $\frac{5}{6}$, 1 y $\frac{5}{4}$, o (multiplicando por 12) a 10, 12 y 15. Entre los sonidos de Tartini de 1^{er} orden aparece ya el 2, que no representa octava baja de ninguno de los sonidos originales.

Se nos objetará tal vez que, en virtud del principio de dualidad, si para los acordes mayores debemos considerar las diferencias de las frecuencias originales, para los menores correspondería considerar las sumas. Esta objeción tiene una triple falla: en primer lugar, el admitir el principio de dualidad ya nos coloca en el terreno de las ideas que vamos exponiendo, en el cual resulta inconsecuente buscar la explicación de la consonancia por otros medios que no sean los que ya hemos explicado; en segundo lugar, los sonidos de Tartini existen realmente, cualquiera sea el acorde o conjunto de notas que consideremos, y no está en nuestras manos el tomarlos o rechazarlos; y si se les atribuye todo el peso de la « explicación » de la consonancia en el caso de los acordes mayores, no vemos por qué se los ha de dejar de lado en este otro caso; y en tercer lugar, aún admitiendo el principio de dualidad y tomando los *sonidos aditivos* (que, como luego veremos, existen realmente) en lugar de los diferenciales, tampoco se explica nada. En el ejemplo del acorde la-do-mi, aparece el sonido (aditivo) de frecuencia $10 + 12 = 22$, octava superior del 11, que no está entre los originales del acorde.

Pero aún hay más: entre los mismos acordes mayores falla la explicación. En efecto, si en lugar de tomar el acorde directo mayor do-mi-sol trasladamos el do una octava hacia arriba, tendremos lo que se llama la primera *inversión*: mi-sol-do (llamado *acorde de sexta*) que no es asonante, pues las frecuencias son aquí: 5, 6 y 8; los sonidos diferenciales de primer orden son 3, 2 y 1; y este último, combinado con el sonido 8, nos da un sonido de Tartini de 2^o orden $8 - 1 = 7$, que no es octava grave de ninguno de los sonidos originales.

Para mostrar aún más claramente la divergencia de los tres conceptos de consonancia estricta, consonancia y asonancia, presentamos en el pequeño cuadro siguiente algunos ejemplos de acordes con las frecuencias (relativas) de sus notas, y su carácter en cada una de las clasificaciones. Se observará que hay acordes que tienen una propiedad y no las otras, lo que prueba esa divergencia:

Acorde	Frecuencias (relativas)	Estrictamente consonante	Consonante	Asonante
do-mi-sol	4, 5, 6	sí	sí	sí
mi-sol-do	5, 6, 8	sí	sí	no
do-mi-sol-te (D.B.) . . .	4, 5, 6, 7	sí	no	sí
sol-te-do-mi »	6, 7, 8, 10	sí	no	no
mi-sol-te-do-re » . . .	5, 6, 7, 8, 9	no	no	sí
do-mi-sol-sib.	36, 45, 54, 64	no	no	no

Se observará que faltan aquí los casos de acordes que sean consonantes sin ser estrictamente consonantes. En efecto, los acordes consonantes en el sentido usual son solo los mayores y menores de la gama tolemaica (y por consiguiente, de la pitagórica y primitiva) y sus inversiones, que son también estrictamente consonantes; pero en cambio, hay acordes estrictamente consonantes que no se clasifican usualmente como consonantes. La clase de aquéllos es, pues, más amplia que la de éstos, y si hemos elegido el calificativo de « estricto » no ha sido para indicar que reduzcamos así las posibilidades (pues como vemos ocurre precisamente lo contrario) sino para significar que ese carácter se refiere « estrictamente » a nuestra teoría armónica.

47. — Para demostrar, en unión de otros puntos también interesantes, nuestra afirmación anterior de que solo hay tres tipos de acordes que sean a la vez estrictamente consonantes y asonantes, conviene que demos previamente algunas nociones y definiciones a efecto sobre todo de abreviar el lenguaje.

Dada una frecuencia cualquiera n , o hablando en términos aritméticos, un número entero y positivo, ese número puede descomponerse siempre, como se sabe, en un producto de factores primos, y la descomposición puede hacerse de una sola manera. Aislemos en esa descomposición todos los factores 2 que aparezcan, y sean por ejemplo, p factores iguales a 2. Como 2 es el único número primo par, los restantes factores, y con ellos su producto, serán impares, y dicho producto tendrá la forma $2q + 1$, siendo q un número, en-

tero y no negativo; pues todo número impar es la suma del número par más próximo ($2q$) más la unidad. Por tanto, n quedará expresado bajo la forma

$$n = 2^p (2q + 1). \quad [1]$$

Los números (enteros y no negativos) p , q , quedan determinados unívocamente cuando se conozca el número n ; y recíprocamente, dados p y q , la expresión anterior determina a n . Dar el número n equivale, pues, a dar el par de números enteros y no negativos p , q .

Por ejemplo: si $n = 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 15 = 2^3(2 \times 7 + 1)$, se tiene: $p = 3$, $q = 7$. Si $n = 21 = 3 \times 7 = 2^0(2 \times 10 + 1)$, es $p = 0$, $q = 10$. Si $n = 1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, es $p = q = 0$. Recíprocamente, si $p = 5$, $q = 1$ se tiene $n = 2^5(2 \times 1 + 1) = 96$.

Al número p lo llamaremos el *exponente de n* , y a n , un *representante* del número impar $2q + 1$, y diremos que éste *está representado* por n .

Acústicamente, el significado de estos números es muy simple: la expresión [1] nos dice que la frecuencia $2q + 1$, elevada en p octavas (multiplicada por 2 sucesivamente p veces) da la frecuencia n . Esta proviene, pues, del armónico impar $2q + 1$, solamente que está colocada p octavas más alta.

Por otra parte, definiremos las *inversiones* de un acorde. Efectuar una inversión quiere decir simplemente, sustituir la nota más baja del acorde por su octava alta inmediata. Aritméticamente, un acorde está dado por un grupo de números $n_1, n_2, \dots, n_k$ que son las frecuencias de las notas del acorde. Si n_1 por ejemplo, es la más baja de estas frecuencias, la inversión significa sustituir el número n_1 por su duplo, $2n_1$. Si las frecuencias están dispuestas por orden creciente: $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, y no llegan a cubrir una octava, de modo que $n_k < 2n_1$, la inversión del acorde es

$$n_2 < n_3 < \dots < n_k < 2n_1.$$

A partir de aquí pueden efectuarse nuevas inversiones. Después de k de ellas, el grupo de números presenta el siguiente aspecto: $2n_1 < 2n_2 < \dots < 2n_k$; y bajando una octava todas las frecuencias recaemos en el acorde original. Es decir, que *un acorde de k notas admite $k - 1$ inversiones*.

Probemos ahora los siguientes teoremas:

TEOREMA I. — Si μ es un entero no negativo, los números

$$\mu + 1, \mu + 2, \mu + 3, \dots, \mu + (\mu + 1) = 2\mu + 1 \quad [2]$$

representan a todos los números impares, $1, 3, 5, \dots, 2\mu + 1$ (naturalmente, en distinto orden, en general).

DEM.: Los números (2) son todos de la forma $\mu + h$, siendo $h = 1, 2, \dots, \mu + 1$. Dos cualesquiera de ellos, $\mu + h_1, \mu + h_2$, representan a impares distintos, porque de lo contrario se tendría:

$$\mu + h_1 = 2^{p_1} (2q + 1) \quad ; \quad \mu + h_2 = 2^{p_2} (2q + 1)$$

y si suponemos por ejemplo que h_1 es menor que h_2 , también resultará $p_1 < p_2$. En este caso se tiene, multiplicando la primera ecuación por 2^{p_2} , la segunda por 2^{p_1} y restando:

$$2^{p_2} (\mu + h_1) - 2^{p_1} (\mu + h_2) = 2^{p_1 + p_2} (2q + 1) - 2^{p_2 + p_1} (2q + 1) = 0,$$

de donde:

$$2^{p_2} (\mu + h_1) = 2^{p_1} (\mu + h_2) \quad , \quad \mu + h_2 = 2^{p_2 - p_1} (\mu + h_1).$$

Como $p_2 > p_1$, la diferencia $p_2 - p_1$ será por lo menos igual a 1, y el factor $2^{p_2 - p_1}$ será mayor, o a lo sumo igual, a 2. Es decir

$$\mu + h_2 \geq 2 (\mu + h_1),$$

y como $h_1 \geq 1$,

$$\mu + h_2 \geq 2 (\mu + 1) = 2\mu + 2,$$

de donde, simplificando:

$$h_2 \geq \mu + 2,$$

que es absurdo, pues h_2 puede a lo sumo valer $\mu + 1$.

Los números representados por los números (2) son, pues, todos distintos; son $\mu + 1$ números impares, y todos evidentemente menores que $2\mu + 1$, salvo uno que es igual. Como los impares que cumplen estas condiciones son los $\mu + 1$ números $1, 3, 5, \dots, 2\mu + 1$, resulta probado el teorema.

TEOREMA II. — *Todo acorde menor que una octava, y en el que estén representados todos los números impares $1, 3, 5, \dots, 2\mu + 1$ (cada uno una sola vez) puede reducirse, mediante inversiones y traslaciones de una o más octavas, a la forma*

$$\mu + 1 < \mu + 2 < \dots < 2\mu + 1. \quad [2']$$

Este teorema no es sino el recíproco del anterior.

DEM.: Ante todo, el acorde consta por hipótesis, solo de $\mu + 1$ notas de la forma

$$2^{p_0} \cdot 1, \quad 2^{p_1} \cdot 3, \quad 2^{p_2} \cdot 5, \quad \dots, \quad 2^{p_\mu} (2\mu + 1).$$

Si tomamos como octava de referencia la octava comprendida entre la frecuencia 1 y la 2, y puesto que nos es permitido elevar o bajar cualquier número de octavas, bajando p_0 octavas tendremos las frecuencias

$$1, \quad 2^{p_1-p_0} \cdot 3, \quad 2^{p_2-p_0} \cdot 5, \quad \dots, \quad 2^{p_\mu-p_0} (2\mu + 1).$$

Como las frecuencias deben ser todas < 2 y ≥ 1 , tendremos:

$$1 \leq 2^{p_1-p_0} \cdot 3 < 2$$

$$1 \leq 2^{p_2-p_0} \cdot 5 < 2$$

$$\dots\dots\dots$$

y en general

$$1 \leq 2^{p_k-p_0} (2k + 1) < 2 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, \mu,$$

de modo que, poniendo $p_k - p_0 = -\alpha_k$, se tiene:

$$\frac{1}{2k + 1} \leq 2^{-\alpha_k} < \frac{2}{2k + 1}$$

y

$$\frac{2k + 1}{2} < 2^{\alpha_k} \leq 2k + 1.$$

Evidentemente, existe (para cada k) un solo α_k que cumpla estas condiciones, pues tomando los logaritmos de base 2 de los tres miembros, se tiene:

$$\log_2 (2k + 1) - 1 < \alpha_k \leq \log_2 (2k + 1),$$

y siendo α_k entero, resulta:

$$\alpha_k = E [\log_2 (2k + 1)]. \quad [3]$$

Como el mayor de los α_k es evidentemente α_μ multiplicando todos los números de nuestro grupo,

$$1, 2^{-\alpha_1} \cdot 3, 2^{-\alpha_2} \cdot 5, \dots, 2^{-\alpha_k} (2k+1), \dots, \\ 2^{-\alpha_{\mu-1}} (2\mu-1), 2^{-\alpha_\mu} (2\mu+1),$$

por 2^{α_μ} todos ellos se hacen enteros, y se tiene:

$$2^{\alpha_\mu} \cdot 1, 2^{\alpha_\mu - \alpha_1} \cdot 3, 2^{\alpha_\mu - \alpha_2} \cdot 5, \dots, 2^{\alpha_\mu - \alpha_k} (2k+1), \dots, \\ 2^{\alpha_\mu - \alpha_{\mu-1}} (2\mu-1), 2\mu+1 \quad [4]$$

Supongamos, como primer caso, que μ se pueda escribir en la forma $\mu = 2^h$. Entonces, $2\mu+1 = 2^{h+1} + 1$, y por la [3], $\alpha_\mu = h+1$, mientras que $\alpha_{\mu-1} = E[\log_2(2^{h+1}-1)] = h$. Y para el valor $k = 2^h - 1$, es $2k+1 = 2^h + 1$ y $\alpha_k = h$. De las notas [4], la primera es, pues, 2^{h+1} ; la $2^h - 1$ -ésima es $2^{h+1-h} (2^h + 1) = 2^{h+1} + 2$, y la última, $2^{h+1} + 1$. Es decir, si las disponemos en orden creciente, se tiene:

$$\dots < 2^{h+1} < 2^{h+1} + 1 < 2^{h+1} + 2 < \dots \quad [4']$$

Probemos ahora que todas las notas restantes son de la forma $2^{h+1} + 2v$, siendo $v = 1, 2, \dots, 2^h - 1$. Por tanto, resultará que 2^{h+1} es la menor de todas las [4'].

Para ello, probemos que toda frecuencia de la forma $2^{h+1} + 2v$ está en el grupo [4], siendo $v = 1, 2, \dots, 2^h - 1$; pues probado ésto, estas $2^h - 1$ notas, junto con $2\mu = 2^{h+1}$ y $2\mu+1 = 2^{h+1} + 1$ que figuran en [4'] nos darán todas las $2^h - 1 + 2 = 2^h + 1 = \mu + 1$ notas del acorde.

Sea $\alpha \geq 0$ el exponente de v , y éste un representante de $2p+1$, es decir, sea

$$v = 2^\alpha (2p+1)$$

Como el máximo valor de v , o sea $2^h - 1$, es inferior a 2^h , resulta ciertamente $\alpha < h$. Además,

$$2p+1 = 2^{-\alpha} v \leq 2^{-\alpha} (2^h - 1),$$

y por tanto

$$2p \leq 2^{-\alpha} (2^h - 1) - 1 < 2^{-\alpha} (2^h - 1),$$

y

$$p < 2^{-\alpha-1} (2^h - 1).$$

Por tanto, si tomamos el índice

$$k = 2^{h-a-1} + p$$

resulta, por una parte

$$\begin{aligned} k &< 2^{h-a-1} + 2^{a-1} (2^h - 1) = 2 \cdot 2^{h-a-1} - \\ &- 2^{a-1} = 2^{h-a} - 2^{a-1} < \mu, \end{aligned}$$

lo que prueba que k es uno de los índices $1, 2, \dots, \mu - 1$; y además,

$$2k + 1 = 2^{h-a} + 2p + 1,$$

y por ser

$$\begin{aligned} 0 &< 2p + 1 < 2^{h-a}, \\ 2^{h-a} &< 2k + 1 < 2 \cdot 2^{h-a} = 2^{h-a+1}, \end{aligned}$$

luego $\alpha_k = h - a$. Por consiguiente, el número

$$\begin{aligned} 2^{a_\mu - \alpha_k} (2k + 1) &= 2^{h+1-(h-a)} (2^{h-a} + 2p + 1) = 2^{h+1} + \\ &+ 2^{a+1} (2p + 1) = 2^{h+1} + 2v \end{aligned}$$

está en nuestra serie. Esta consta, pues, como ya dijimos, de los siguientes números (ordenados por orden creciente):

$$\begin{aligned} 2^{h+1} &< 2^{h+1} + 1 < 2^{h+1} + 2 < 2^{h+1} + 4 < \dots < 2^{h+1} + \\ &+ 2v < \dots < 2^{h+1} + 2(2^h - 1) = 2^{h+2} - 2, \end{aligned} \quad [5]$$

de donde, practicando dos inversiones:

$$\begin{aligned} 2^{h+1} + 2 &< 2^{h+1} + 4 < \dots < 2^{h+1} + 2v < \dots < 2^{h+2} - \\ &- 2 < 2^{h+2} < 2^{h+2} + 2, \end{aligned}$$

y bajando una octava y reemplazando 2^h por μ :

$$\mu + 1 < \mu + 2 < \dots < \mu + v < \dots < 2\mu - 1 < 2\mu < 2\mu + 1, \quad [6]$$

y el teorema queda demostrado en este caso.

Si ahora fuera $\mu = 2^h + 1$, se tiene $\alpha_\mu = h + 1 = \alpha_{\mu-1}$, $\alpha_{\mu-2} = h$, y la nueva nota $2\mu + 1 = 2^{h+1} + 3$ aparece intercalada en [5] entre la 3ª y la 4ª. Practicando entonces cuatro inversiones y bajando una octava, recaemos en la [6]. En general, si $\mu = 2^h + \delta$, siendo

$\delta < 2^h - 1$, el valor de α_μ sigue siendo el mismo, $h + 1$, y la nota $2\mu + 1 = 2^{h+1} + 2\delta + 1$ viene a intercalarse en [5] entre las dos inmediatas, $2^{h+1} + 2\delta$ y $2^{h+1} + 2\delta + 2$. Con $2(\delta + 1)$ inversiones y un descenso de octava, la [5] nos da siempre la [6]. Al llegar al valor $\delta = 2^h - 1$, ó $\mu = 2^{h+1} - 1$, la nota $2\mu + 1$ se coloca al final del grupo [5], y la [5] da directamente la [6]. Si $\mu = 2^{h+1} = 2^{h'}$, valen los mismos razonamientos con el valor $h' = h + 1$ en lugar de h . El teorema está, pues, demostrado en todos los casos.

48. — Los dos teoremas anteriores son previos, y sin relación por el momento con los acordes asonantes. Ellos nos dicen que los acordes menores que una octava, en que estén representados los armónicos impares 1, 3, 5, ..., $2\mu + 1$ son todos del tipo $\mu + 1 < \mu + 2 < \dots < 2\mu + 1$ y solamente éstos. Relacionaremos ahora, en los teoremas que van seguir, el acorde-tipo $\mu + 1 < \mu + 2 < \dots < 2\mu + 1$ con los acordes asonantes.

TEOREMA III. — *El acorde-tipo [6] es asonante.*

DEM.: Como las notas consecutivas de [6] difieren en una unidad, el 1 será uno de los sonidos de Tartini de 1^{er} orden de este acorde; tomando en cambio las notas de dos en dos se obtiene el sonido diferencial 2, de tres en tres el sonido 3, y así sucesivamente. La frecuencia más alta entre los sonidos diferenciales de primer orden es evidentemente $2\mu + 1 - (\mu + 1) = \mu$. Los sonidos diferenciales junto con las notas originales dan, pues, toda la serie numérica 1, 2, ..., μ , $\mu + 1$, ..., $2\mu + 1$. Es entonces evidente que los sonidos diferenciales de 2^o orden, o de órdenes superiores, no dan frecuencias nuevas.

Los sonidos diferenciales 1, 2, ..., μ representan armónimos impares que no pueden superar evidentemente a $2\mu + 1$; y como ya entre los sonidos originales $\mu + 1$, $\mu + 2$, ..., $2\mu + 1$ están representados todos esos armónicos (Teorema I), concluimos, como afirma el teorema, que el acorde-tipo es asonante.

TEOREMA IV. — *Todo acorde asonante menor que una octava puede reducirse (mediante inversiones y traslaciones de octavas) al tipo [6].*

DEM.: Procederemos a esta demostración por el método de inducción completa, tan conocido de los matemáticos. Ante todo, es inmediato que el único acorde menor que una octava en que estén repre-

sentados los armónicos 1 y 3 solamente, y cada uno una vez, es el acorde $2 < 3$ (el otro posible, $3 < 4$, se reducé a éste mediante inversión y descenso de una octava), y éste es evidentemente asonante y del tipo [6] ($\mu = 1$). El teorema está así demostrado para el caso especial $\mu = 1$.

Admitamos ahora, por un instante, que hayamos demostrado el teorema para todos los valores $\mu = 1, 2, \dots, \delta$, es decir, que para cada uno de esos valores de μ , el único acorde asonante menor que una octava en que esté representados los armónicos 1, 3, $\dots, 2\mu + 1$, sea el acorde [6]. Bajo esta suposición, consideremos ahora un acorde menor que una octava, asonante, y en el que estén representados los armónicos hasta el $2(\delta + 1) + 1$, es decir, algunos de los números 1, 3, 5, $\dots, 2\delta + 1, 2(\delta + 1) + 1 = 2\delta + 3$, pudiendo no estar todos, pero debiendo figurar el último. Evidentemente, siempre podremos disponer las notas de ese acorde en orden creciente, de modo que $2\delta + 3$ sea la última (ello solo requiere subir o bajar cierto número de octavas), es decir:

$$v_1 < v_2 < \dots < v_m < 2\delta + 3. \quad [7]$$

Si consideramos el acorde parcial formado por las notas $v_1, v_2, \dots, v_m$, éste es menor que una octava. Sus sonidos diferenciales, por estar contenidos entre los del acorde total, no presentan sino armónicos impares no superiores a $2\delta + 3$. Probemos ahora que estos armónicos no pueden alcanzar el valor $2\delta + 3$.

Para ello, llamemos $2q_k + 1$ al armónico que representa v_k , y sea p_k el exponente de v_k , para $k = 1, 2, \dots, m$. Es decir, sea

$$v_k = 2^{p_k} (2q_k + 1) \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Entonces se tiene (puesto que el armónico $2\delta + 3$ no está representado entre los v_k):

$$2q_k + 1 \leq 2\delta + 1, \quad 0 \leq q_k \leq \delta. \quad [8]$$

Consideremos ahora, siendo $k' > k$, el sonido diferencial $v_{k'} - v_k$, llamando p a su exponente y $2q + 1$ al armónico que él representa:

$$v_{k'} - v_k = 2^p (2q + 1) = 2^{p_{k'}} (2q_{k'} + 1) - 2^{p_k} (2q_k + 1). \quad [9]$$

En esta expresión se presentan tres casos para los valores de $p_k, p_{k'}$, según que el primero de éstos sea igual, mayor o menor que el segundo.

En el primer caso, $p_k = p_{k'}$, se tiene:

$$v_{k'} - v_k = 2^{p_k} [(2q_{k'} + 1) - (2q_k + 1)] = 2^{p_k+1} (q_{k'} - q_k).$$

Entonces la diferencia $q_{k'} - q_k$, por la [8], es ciertamente no superior a δ , y el factor impar contenido en ella, o sea $2q + 1$, resulta a fortiori $\leq \delta$, y por tanto, ciertamente $< 2\delta + 1$.

Si $p_k > p_{k'}$, en la [9] se puede sacar como factor común a $p_{k'}$, obteniéndose así:

$$2^p (2q + 1) = 2^{p_{k'}} [2q_{k'} + 1 - 2^{p_k - p_{k'}} (2q_k + 1)];$$

la cantidad encerrada entre corchetes, por ser evidentemente impar, coincide con $2q + 1$, y por otra parte es $< 2q_{k'} + 1$; luego, se tiene:

$$2q + 1 < 2q_{k'} + 1 \leq 2\delta + 1.$$

En el tercer caso, $p_k < p_{k'}$, se puede escribir [9] bajo la forma

$$2^p (2q + 1) = 2^{p_k} [2^{p_{k'} - p_k} (2q_{k'} + 1) - (2q_k + 1)],$$

en donde nuevamente, la cantidad entre corchetes es $2q + 1$. Ahora bien: como el acorde total [7] es menor que una octava, ciertamente es $v_{k'} < 2v_k$, o sea:

$$2^{p_{k'}} (2q_{k'} + 1) < 2^{p_k+1} (2q_k + 1)$$

y

$$2^{p_{k'} - p_k} (2q_{k'} + 1) < 2 (2q_k + 1).$$

Por consiguiente, se tiene:

$$\begin{aligned} 2q + 1 &= 2^{p_{k'} - p_k} (2q_{k'} + 1) - (2q_k + 1) < 2 (2q_k + 1) - \\ &\quad - (2q_k + 1) = 2q_k + 1 \end{aligned}$$

y, como antes, $2q + 1 < 2\delta + 1$.

En todos los casos resulta, pues, que los sonidos diferenciales del acorde parcial $v_1 < v_2 < \dots < v_m$ representan armónicos $< 2\delta + 1$. En otros términos, este acorde parcial, donde solo intervienen armónicos de la serie $1, 3, \dots, 2\delta + 1$, es asonante. Luego, en virtud de lo que hemos admitido, este acorde puede reducirse a la forma $\delta + 1 < \delta + 2 < \dots < 2\delta + 1$. Invirtiendo una vez y agregando la nota excluida $2\delta + 3$, se tiene el acorde total en la forma

$$\delta + 2 < \delta + 3 < \dots < 2\delta + 1 < 2\delta + 2 < 2\delta + 3,$$

que no es sino el acorde-tipo [6], en donde μ tiene el valor $\delta + 1$.

Vemos, pues, que, admitido el teorema para los valores $\mu \leq \delta$, resulta también cierto para $\mu = \delta + 1$. Como ya sabemos que el teorema es cierto para $\mu \leq 1$, resulta cierto también para $\mu = 2$; siendo cierto para $\mu \leq 2$, resulta cierto para $\mu = 3$; y así sucesivamente, quedando demostrado en general.

49. — De estos resultados se obtiene inmediatamente el

TEOREMA V. — *Los acordes asonantes menores que una octava son todos aquellos en que están representados todos los armónicos impares (y cada uno una sola vez) desde 1 hasta un impar cualquiera $2\mu + 1$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots$), y solamente ellos. Tales acordes pueden reducirse siempre al acorde-tipo*

$$\mu + 1 < \mu + 2 < \dots < 2\mu + 1 \quad [6]$$

y recíprocamente.

DEM.: Un acorde asonante menor que una octava se reduce al tipo [6] (Teorema IV), y éste contiene representantes de todos los armónicos impares 1, 3, 5, ..., $2\mu + 1$, cada uno una sola vez (Teor. I). Recíprocamente, todo acorde que contenga dichos representantes se reduce a la forma [6] (Teor. II) y éste es asonante (Teor. III).

Resulta así que los únicos acordes asonantes menores que una octava son:

- | | |
|--|---|
| para $\mu = 0$: 1, | (acorde «impropio» de una sola nota); |
| » $\mu = 1$: 2 < 3, | do-sol, acorde mayor pitagórico, estrictamente consonante; |
| » $\mu = 2$: 3 < 4 < 5, | sol-do-mi, inversión del acorde mayor Tol., estrictamente consonante; |
| » $\mu = 3$: 4 < 5 < 6 < 7, | do-mi-sol-te, acorde mayor de D. B., estrictamente consonante; |
| » $\mu = 4$: 5 < 6 < 7 < 8 < 9, | mi-sol-te-do-re, no estrictamente consonante; |
| » $\mu = 5$: 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11, | sol-te-do-re-fa# (?), no estrictamente consonante; |
| » $\mu = 6$: 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < 13, | te-do-re-mi-fa# (?) - sol-la _b (?), no estrictamente consonante; |
| | etc. |

(las notas $fa\sharp$ (?) y $la\flat$ (?) indican notas que no tienen equivalente exacto en nuestros actuales sistemas, pues la primera pertenece a una Γ^{11} y la segunda a una Γ^{13}).

Como se ve, los únicos acordes estrictamente consonantes y a la vez asonantes son los que ya mencionamos en el § 46, pues la serie de los números primos impares 1, 3, 5, 7, 11, 13, ... coincide con la de los números impares solo hasta el 7, pero a partir de aquí ya aparece el 9, que es impar pero no primo.

CAPITULO VI

ARMONIA Y MELODIA

50.— Estudiemos un poco más de cerca el conjunto de sonidos que acompañan a un acorde, y que parcialmente mencionamos en el § 45. Distinguiremos en el acorde, por una parte los sonidos originales, que podemos también llamar *sonidos diferenciales de orden 0*; por otra parte, los sonidos diferenciales de orden 1, 2, 3, ...; y además, los armónicos sucesivos de las notas del acorde.

El conjunto de frecuencias que se ponen en acción al ejecutar un acorde, da así por lo pronto esos tres conjuntos parciales. Ahora bien: si tomamos una frecuencia cualquiera del conjunto total, sea v , un múltiplo cualquiera de esa frecuencia está también en el conjunto total. En efecto: si esa frecuencia es uno de los sonidos originales, ya sabemos que también los armónicos de ella están en el conjunto; y estos armónicos no son sino los múltiplos sucesivos de v . Si v es un sonido diferencial de 1^{er} orden, igual a la diferencia $v' - v''$ de dos sonidos originales, como también están en el conjunto los múltiplos kv' , kv'' (donde $k = 1, 2, 3, \dots$), estos múltiplos dan a su vez el sonido diferencial $kv' - kv'' = k(v' - v'') = kv$. Si v es un sonido diferencial de 2^o orden, igual a $v' - v''$ siendo v' , v'' sonidos de orden 0 ó 1, como acabamos de probar que también kv' y kv'' están en el conjunto, nuevamente deducimos la misma consecuencia para kv ; y en general, se prueba lo mismo para sonidos diferenciales de cualquier orden (inducción completa). Finalmente, si v es un armónico de uno de los sonidos originales, entonces es igual a un cierto múltiplo hv' de una de las frecuencias originales v' ; pero entonces también está en el conjunto del múltiplo $khv' = kv$.

Análogamente se prueba que si tomamos dos frecuencias v_1, v_2 del conjunto ($v_1 > v_2$), la diferencia $v_1 - v_2$ también está en él. O,

más brevemente: como v_1, v_2 son sonidos realmente existentes en el conjunto, dan un sonido diferencial que es $v_1 - v_2$.

El conjunto total de frecuencias puestas en juego al ejecutar un acorde es, pues, un conjunto de números enteros (y positivos) que tiene las siguientes propiedades: la diferencia de dos de ellos está en el conjunto, y un múltiplo cualquiera de uno de ellos está también en el conjunto. Todo conjunto de números que goce de estas propiedades se llama en álgebra un *ideal* en el campo de números enteros. Por consiguiente: *al ejecutar un acorde, se pone en juego un conjunto de frecuencias que constituyen un ideal en el campo de los números enteros.*

Ahora bien: un razonamiento bien conocido ⁽¹⁾ nos permite afirmar que *un ideal en el campo de los números enteros está constituido por los múltiplos de un cierto número β , y solamente por ellos.* Estos múltiplos, siendo β una frecuencia, no representan sino los armónicos sucesivos de β .

Por consiguiente: *al ejecutar un acorde, se dejan oír, no sólo las notas originales de ese acorde, sino todos los armónicos de una cierta nota β , y solamente ellos* (los sonidos originales figuran, naturalmente, entre dichos armónicos).

La nota β , definida así unívocamente para cada acorde, no es sino lo que en casos particulares ya Rameau llamaba el *bajo fundamental* del acorde, solo que presentado y definido en una forma más general y completa ⁽²⁾.

Notemos que si el acorde se reduce a una sola nota, el conjunto de frecuencias puestas en juego consta precisamente de los armóni-

(1) Este razonamiento es el siguiente: sea $a > 0$ el mínimo entero positivo que está en el ideal I ; y sea b otro elemento cualquiera de I . Efectuando la división de b por a obtendremos un cociente q y un resto r , de modo que se podrá escribir

$$\frac{b}{a} = q + \frac{r}{a} \quad , \quad \text{ó} \quad b = aq + r,$$

y siendo r el resto, deberá ser no negativo y menor que el divisor: $0 \leq r < a$. Ahora bien: por estar a y b en I , también aq y $b - aq$ están en I . Pero $b - aq = r$, luego r está en I . En el ideal está entonces el número no negativo r , menor que a ; y como a era el mínimo entero positivo del ideal, se deduce que necesariamente es $r = 0$, lo que prueba que $b = aq$ es múltiplo de a .

Todo número del ideal es, pues, múltiplo de a ; y recíprocamente, por la definición misma de I , todo múltiplo de a forma parte de él. El ideal I consta, pues, de todos los múltiplos de a (inclusive 0) y sólo de ellos.

(2) Este concepto se aproxima en realidad más, por su definición aritmética, al *sonido genitor* de M. GANDILLOT. Véase (VI).

cos de esa nota, de modo que nuestras consideraciones se pueden aplicar también a este caso: *la única diferencia es que el bajo fundamental β coincide con la nota misma*, en lugar de ser un verdadero « bajo ».

51. — ¿Cómo se halla el bajo fundamental β conociendo las frecuencias $v_1, v_2, \dots, v_m$ que constituyen las notas del acorde? Desde luego, por su misma definición, β debe ser un divisor común de $v_1, v_2, \dots, v_m$, y por tanto, divisor del máximo común divisor δ de estos números: es decir, existe un entero k tal que

$$\delta = k \beta.$$

Ahora bien: el ideal es el conjunto *mínimo* que contiene a los números dados $v_1, \dots, v_m$. Como los múltiplos de δ constituyen un ideal que contiene a $v_1, \dots, v_m$, es necesario que todo múltiplo de δ lo sea también de β y viceversa. Pero de aquí resulta $k = 1$ y $\delta = \beta$, pues de lo contrario, por ejemplo el número $(k + 1)\beta = \frac{k + 1}{k} \delta$ sería múltiplo de β sin serlo de δ . Por tanto: *el bajo fundamental β es el máximo común divisor de las frecuencias de las notas del acorde, $v_1, v_2, \dots, v_m$.*

Si el acorde se traslada en un intervalo cualquiera, es claro que su bajo fundamental se traslada en el mismo intervalo; por ejemplo, si elevamos una octava todas las frecuencias $v_1, \dots, v_m$, o sea si las duplicamos, también quedará duplicado β . Podrá pensarse talvez que si en lugar de tomar el intervalo de octava tomamos uno fraccionario, por ejemplo una quinta, o sea $\frac{3}{2}$, algunas de las frecuencias se hacen fraccionarias y ello podría traer dificultades; pero es evidente que tales dificultades son ilusorias, y que podemos siempre evitarlas; en el caso propuesto como ejemplo, podemos, si se quiere, adoptar como unidad de tiempo para la medida de las frecuencias el doble segundo, en cuyo caso las frecuencias originales se hacen $2v_1, 2v_2, \dots, 2v_m$, y al efectuar la traslación del intervalo $\frac{3}{2}$ se transforman en $3v_1, 3v_2, \dots, 3v_m$. El bajo fundamental 2β se transforma en 3β o, volviendo a la unidad primitiva (el segundo), en $\frac{3}{2}\beta$, y hemos eliminado la dificultad.

Podemos aprovechar esta circunstancia para suprimir todo factor común a las frecuencias originales (lo que equivale a bajarlas en un

mismo intervalo), en cuyo caso los números $v_1, \dots, v_m$ se hacen primos entre sí, y β se reduce a la unidad. *En el caso de frecuencias $v_1, \dots, v_m$ primas entre sí, resulta $\beta = 1$ y el ideal consta de todos los números enteros.*

En lo que sigue, al referirnos a las frecuencias $v_1, \dots, v_m$ de las notas de un acorde, entenderemos que ellas sean *primas entre sí*, habiéndose suprimido sus factores comunes, en cuyo caso el bajo fundamental es la frecuencia 1. Si las frecuencias no fueran primas entre sí, de modo que tuvieran un factor común, ese factor es precisamente la frecuencia del bajo fundamental β . Resulta de aquí que siempre es posible expresar las frecuencias originales de un acorde bajo la forma $\beta v_1, \beta v_2, \dots, \beta v_m$, siendo β la frecuencia de su bajo fundamental y $v_1, \dots, v_m$ números primos entre sí.

Por ejemplo: calculemos el bajo fundamental del acorde fa-la-do tolemaico. Si adoptamos el la normal de frecuencia 435, entonces el fa tiene la frecuencia 348 y el do la frecuencia 522. Como

$$348 = 87 \times 4 = \beta v_1$$

$$435 = 87 \times 5 = \beta v_2$$

$$522 = 87 \times 6 = \beta v_3,$$

resulta $\beta = 87$, y $v_1 = 4$, $v_2 = 5$, $v_3 = 6$. Como $\beta \cdot 2^2 = fa$, resulta que el bajo fundamental β es la doble octava baja del fa del acorde.

El mismo resultado se obtiene, naturalmente, si se toman las frecuencias relativas en lugar de las absolutas. Sabemos ya que en el acorde mayor tolemaico (sea éste el fa-la-do, el do-mi-sol, o cualquier otro) las tres frecuencias están en relación de los números 4, 5 y 6. Entonces (por ser estos números primos entre sí) el bajo fundamental es 1, doble octava baja de la nota 4, o sea, en el caso propuesto, el fa. Los resultados coinciden.

En el caso del acorde mayor pitagórico, de frecuencias 2 y 3, el bajo fundamental es la octava baja de la nota 2, fundamental o tónica. En la gama de Domínguez Berrueta, el acorde mayor es do-mi-sol-te o 4, 5, 6, 7, y el bajo fundamental se halla nuevamente dos octavas abajo del do.

En general, un acorde mayor de la $\Gamma^{p_1, \dots, p_r}$ consta de notas de frecuencias proporcionales a: $\frac{p_1}{2^{a_1}}, \frac{p_2}{2^{a_2}}, \dots, \frac{p_r}{2^{a_r}}$, siendo las $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ enteros determinados en tal forma que sea siempre

$$1 < \frac{p_k}{2^{a_k}} < 2$$

o sea

$$\frac{p_k}{2} < 2^{\alpha_k} < p_k,$$

de donde:

$$\log_2 p_k - 1 < \alpha_k < \log_2 p_k$$

y, recordando la definición de las magnitudes π_k (ver fórmulas [3], § 14) y de la parte entera de un número (fórmulas [2], § 14), resulta finalmente:

$$\alpha_k = E(\pi_k) = E(\log_2 p_k).$$

Como las α_k crecen al crecer k (pues $p_1 < p_2 < \dots p_r$), multiplicando las frecuencias del acorde por $2^{E(\pi_r)}$, que es la mayor potencia de 2 que aparece en los denominadores, todas las fracciones se hacen enteras:

$$2^{E(\pi_r)}, 2^{E(\pi_r) - E(\pi_1)} \cdot p_1, 2^{E(\pi_r) - E(\pi_2)} \cdot p_2, \dots, \\ 2^{E(\pi_r) - E(\pi_{r-1})} \cdot p_{r-1}, p_r.$$

Y como ninguno de estos números, salvo el último, contiene el factor primo p_r , es evidente que son primos entre sí. El bajo fundamental es $1 = 2^{E(\pi_r)} \cdot 2^{-E(\pi_r)}$, es decir, está $E(\pi_r)$ octavas más abajo que la primera nota o *tónica* del acorde. Por consiguiente:

El bajo fundamental de un acorde mayor de una $\Gamma_{p_1 \dots p_r}$ está $E(\pi_r)$ octavas debajo de la nota fundamental o tónica del acorde mismo; y no depende, por consiguiente, sino del armónico más alto, p_r , que da origen a la gama, pero no de los demás.

Por ejemplo, en todas las $\Gamma \dots$,⁷ cuyo armónico más alto sea el 7 (estén o no los armónicos 3, 5 entre los generadores de la gama), el bajo fundamental de los acordes mayores está $E(\log_2 7)$ octavas debajo de la tónica. Como $2^2 < 7 < 2^3$, se tiene $E(\log_2 7) = 2$, conforme ya lo vimos en la gama de Domínguez Berrueta. En una $\Gamma \dots$,¹¹ como $E(\log_2 11) = 3$, el bajo fundamental estaría tres octavas abajo de la tónica.

Análogamente podemos operar con los acordes menores: un acorde menor (véase § 40) se compone de las notas: $1, \frac{2^{\lambda_1}}{p_1}, \frac{2^{\lambda_2}}{p_2}, \dots, \frac{2^{\lambda_r}}{p_r}$, donde los exponentes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ deben determinarse en forma semejante a las α_k del acorde mayor, es decir, de tal modo que

$$\frac{1}{2} < \frac{2^{\lambda_k}}{p_k} < 1$$

(esto teniendo en cuenta que la nota fundamental 1 es *la más alta* del acorde); o sea:

$$\frac{1}{2} p_k < 2^{\lambda_k} < p_k$$

$$\log_2 p_k - 1 < \lambda_k < \log_2 p_k.$$

Por consiguiente, se tiene nuevamente:

$$\lambda_k = E(\pi_k).$$

Multiplicando las frecuencias por el producto $p_1 \dots p_r$, que es el mínimo común múltiplo de los denominadores, tendremos las frecuencias

$$p_1 p_2 \dots p_r, \quad 2^{E(\pi_1)} p_2 \dots p_r, \quad 2^{E(\pi_2)} p_1 p_3 \dots p_r, \\ \dots, \quad 2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \dots p_{r-1},$$

evidentemente primas entre sí. El bajo fundamental es ahora 1, y por tanto se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota fundamental (la primera de las escritas) por $p_1 p_2 \dots p_r$.

El bajo fundamental de un acorde menor de una $\Gamma^{p_1 \dots p_r}$ se obtiene dividiendo la frecuencia de la nota fundamental por el producto $p_1 p_2 \dots p_r$; y depende, por lo tanto, de todos los armónicos generadores de la gama.

Por ejemplo: en la Γ^3 de Pitágoras, el acorde menor do-fa (donde do, nota fundamental es la más alta) tiene las frecuencias relativas $1, \frac{2}{3}$, ó $3, 2$. El bajo fundamental se encuentra dividiendo por 3 la frecuencia del do, lo que da el fa de la octava inmediatamente inferior al fa del acorde. En la $\Gamma^{3,5}$ de Tolomeo, las frecuencias son 15, 12, 10 y el bajo fundamental se halla dividiendo por $15 = 3 \times 5$ la frecuencia de la nota fundamental, lo que da por ejemplo para el acorde mi-do-la, un fa situado en la cuarta octava baja a partir del mi. En efecto, si tomamos, como es costumbre, el do como frecuencia 1, el mi tiene la frecuencia $\frac{5}{4}$; la frecuencia del bajo fundamental β es la 15-ava parte de esta última, o sea

$$\beta = \frac{5}{4} \times \frac{1}{15} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^4},$$

es, decir el fa $\left(\frac{4}{3}\right)$ bajado cuatro octavas.

Es digno de notarse que con respecto a la teoría del bajo fundamental, *no se verifica el principio de dualidad*. Ello tiene su explicación en el hecho de que los sonidos diferenciales provienen todos, como múltiplo, de un sonido de frecuencia mínima, que es precisamente el bajo fundamental. En cambio los sonidos aditivos (que habría que considerar, en el caso de las acordes menores, como duales de los de Tartini) no admiten un máximo, del cual todos ellos sean submúltiplos. Ficticiamente podríamos hallar el mínimo común múltiplo de las frecuencias $v_1, v_2, \dots, v_m$ de un acorde, y construir con ayuda de este « tiple fundamental » una teoría análoga a la del bajo fundamental, restableciendo así la ley de dualidad. Pero ello no tendría sentido acústicamente, pues hay siempre armónicos que sobrepasan en altura a ese « tiple fundamental », el cual pierde, por lo mismo, toda su importancia.

(Continuará)

LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS EN NUESTRA LEGISLACIÓN CIVIL

POR EL

INGENIERO CARLOS WAUTERS

RÉSUMÉ

INTRODUCTION. — Conservons la structure juridique du code en vigueur. — Les réformes proposées ne semblent pas justifiées. — L'interprétation technique, imposée par les conditions physiques du milieu, doit suffire et prévaloir.

1. — *Unité de notre législation des eaux.* — Elle ne fait que traduire celle qui correspond à l'inévitable processus de leur circulation naturelle. — Ses différentes étapes ne peuvent produire un changement de régime légal. — Notre codificateur a su profiter du champ absolument vierge qui s'offrait à lui. — Même régime légal pour les eaux de surface et souterraines.
2. — *Sérieuses réserves sur la domanialité des eaux privées.* — Protection de l'écoulement sur les fonds inférieurs. — Superficielles ou souterraines, elles n'entrent dans le domaine privé qu'avec de sévères restrictions. — L'expropriation pour cause d'utilité publique sauve tout privilège embarrassant. — D'insignifiantes corrections suffisent pour conserver toute sa valeur au code.
3. — *Critiques infondées à l'écoulement privilégié des eaux de surface.* — L'appropriation privée ne peut se produire en aucun cas, ni sur les eaux surabondantes, ni par possession trentenaire, ni par achat, ni par prescription. — S'il existe une richesse gaspillée, le cas échéant, l'expropriation en donne l'exploitation à une communauté d'usagers. — Nos dispositions légales doivent être respectées sans aucune réserve.
4. — *L'Avant-projet de réforme maintient les notions de domanialité des eaux.* — Écartons toute terminologie vulgaire. — Quelques simples rectifications suffisent pour conserver la notion d'unité et d'harmonie du domaine. — Les eaux privées sont amenées à disparaître.
5. — *Découverte de cas anormaux dans les eaux de domaine privé.* — L'Avant-projet prétend introduire dans notre milieu la notion d'un « cours d'eau stable ». — Le caractère privé du domaine de l'eau est indépendant de son volume. — Influence de la législation des pays humides d'Europe. — Ses principes essentiels ne s'adaptent pas au nôtre. — Le code en vigueur offre une solution bien simple aux difficultés entrevues.
6. — *L'Avant-projet n'accorde aucune protection à l'écoulement quand il existe intervention de la main de l'homme.* — Il ne l'admet pas même avec indemnité. — Il impose une servitude d'écoulement. — C'est une ré-

forme de graves conséquences pour la région aride du pays. — Même en améliorant la précision recherchée par la réforme, les principes du code actuel peuvent être maintenus avec grand avantage.

7. — *La servitude d'écoulement s'impose dans tous les cas.* — L'Avant-projet supprime tout ce qui a trait à l'obligation de recevoir les eaux des fonds supérieurs et de s'en servir. — Par une déplorable définition générale il prétend assurer le droit de passage des eaux. — Raisons techniques et économiques qui s'y opposent. — Oubli absolu des exigences de notre région aride.
8. — *La Commission de Réformes et les eaux souterraines.* — Elle en reconnaît l'importance mais propose de les renvoyer à une loi spéciale. — Manque de précision, même en matière de domaine. — C'est une solution qui contredit son désir de moderniser la législation. — Absence évidente de l'indispensable conseiller technique en la matière.
9. — *Les difficultés qui la détiennent.* — Les principales énoncées sont les mêmes que pour les eaux de surface. — Les solutions, dans les deux cas, sont d'ordre technique et non légal. — La prévision du code apparaît une fois de plus. — Il n'est pas admissible que les eaux de surface soient régies par le code civil et les souterraines par une loi spéciale.
10. — *Un nouveau code incomplet occasionnerait de graves inconvénients.* — Principes *inflexibles* dans la législation, règles *flexibles* dans les ordonnances. — Fonction *légal* de la première, fonction *technique* des dernières. — Chez nous et en pratique, nous procédons à l'inverse. — Une loi spéciale ayant les caractéristiques des dernières serait néfaste. — L'expérience nous signale un procédé tout autre.
11. — *Enseignement à recueillir d'autres nations devancières.* — Conséquences du manque d'unité de législation aux Etats Unis de l'Amérique du Nord. — Droit riverain et appropriation privée. — Evolution des deux doctrines. — Tendance de la jurisprudence fédérale. — Son influence sur le régime légal des eaux souterraines. — Les attributions du droit de police sur la jouissance rationnelle des eaux.
12. — *Notions essentielles pour une législation unifiée.* — La diversité de conditions géographiques et physiques de notre immense territoire nous impose une extrême prudence dans la législation des eaux. — N'altérons pas celle consacrée par le code avec grande prévoyance. — Eloignons toute tentative d'y introduire des dispositions réglementaires. — C'est du ressort des ordonnances locales. — Evitons l'exploitation par surprise des « mystères » que l'on prétend découvrir dans les marais.
13. — *Les eaux souterraines dans la législation proposée.* — Six articles suffisent pour les incorporer avec toute précision. — Sans les augmenter la concision recherchée se trouve assurée. — Dépuration de la terminologie. — La discrète méthodologie assure le reste.

CONCLUSIONS.

SUMARIO

INTRODUCCIÓN. — En esta especial materia, mantengamos la estructura jurídica del código en vigor. — Injustificadas tentativas reformistas. — Debe predominar su interpretación técnica impuesta por la realidad del ambiente físico.

1. — *Unidad de nuestra legislación civil de aguas.* — Traduce la de su inevitable proceso de circulación natural. — Imposible cambio de régimen legal en sus distintas etapas. — Campo virgen en que supo imponerla el codificador. — Perfecta armonía de régimen de las superficiales y subterráneas.

2. — *Severas reservas opuestas con respecto al dominio privado de las aguas.* — Protege el derrame de todas en terrenos inferiores. — No entran al dominio privado, sean superficiales o subterráneas, sino con extremas restricciones. — La expropiación por causa de utilidad pública allana cualquier privilegio perjudicial. — Para conservar la pureza de nuestro régimen legal bastan insignificantes retoques.
3. — *Críticas infundadas al privilegiado derrame de las superficiales.* — Ni sobre sobrantes puede existir apropiación privada. — Ni por posesión trentenaria, ni por compra, ni por prescripción. — Si hay riqueza malograda, el procedimiento de la expropiación las entrega a una comunidad de usuarios. — El precepto en vigor debe respetarse sin reserva alguna.
4. — *El Anteproyecto mantiene los preceptos sobre dominio.* — Apartemos la terminología del vulgo. — Con pocas rectificaciones de forma se conservan la unidad y armonía sobre dominio. — Las aguas privadas son llamadas a desaparecer con el tiempo. — No legalicemos artificios amoraes interesados.
5. — *Descubrimiento teórico de casos anormales cuando son privadas.* — El Anteproyecto introduce en nuestro medio el concepto exótico de « cursos estables de agua ». — El carácter privado del agua es extraño al monto de su caudal. — Perniciosa influencia de la legislación europea en países húmedos. — Inconsistencia de sus argumentos en nuestro ambiente físico. — Existe solución sencilla dentro del código en vigor.
6. — *El Anteproyecto no protege el derrame de las aguas en que interviene trabajo del hombre.* — Ni con pago de indemnización admite su derrame. — Impone la constitución de una servidumbre forzosa de acueducto. — Es enmienda de graves consecuencias para la región árida del país. — Sin alterar las previsoras disposiciones del código, la concepción del articulado puede asegurarse con evidentes ventajas.
7. — *La servidumbre de acueducto se impone para todos los casos.* — Supuestos inútiles del Anteproyecto suprimen todo el articulado sobre desagüe de predios ajenos y de sacar agua. — Con una pésima regla de carácter general pretende asegurar el paso de las aguas. — Contraría imperativos técnicos y económicos. — Olvido completo de las necesidades de la región árida.
8. — *La Comisión Reformadora frente a las aguas subterráneas.* — Reconoce su importancia pero propone relegarlas a una ley especial. — Ni siquiera en materia de dominio se define con precisión suficiente. — Con su resolución contradice sus intenciones de modernizar el código en vigor. — Revela no haber buscado el asesoramiento técnico indispensable en esta materia.
9. — *Las pretendidas dificultades que la detienen en su estudio.* — Las seis principales enumeradas son idénticas para las aguas superficiales. — Se resuelven, en ambos casos, con técnica y no con leyes. — La previsión del código en vigor se exterioriza una vez más. — No cabe admitir que las superficiales se contemplen en el código y las subterráneas se aparten en ley especial.
10. — *Perjuicios que traería un nuevo código incompleto en la materia.* — Preceptos inflexibles en la legislación y reglas flexibles en las ordenanzas. — Función legal de aquéllas y técnica de éstas. — En la práctica se procede a la inversa entre nosotros. — Una ley especial como la que reclama la Comisión Reformadora resultaría deplorable. — La experiencia nos señala un procedimiento muy distinto.
11. — *Enseñanzas que nos ofrecen las naciones precursoras.* — Consecuencias de la falta de unidad de legislación en los E. U. de N. América. — Derecho ribereño y apropiación privada. — Evolución de ambas doctrinas. — Tendencias de la jurisprudencia federal. — Su influencia en el régimen legal de las subterráneas. — El uso racional juiciosamente fiscalizado.

- 12.— *Preceptos esenciales para una legislación unificada.* — La diversidad del ambiente físico nos impone extrema prudencia en la legislación civil de aguas. — No malogremos la consagrada por nuestro codificador. — Descartemos todo propósito de reglamentación. — Corresponde a las reglas flexibles de las ordenanzas locales. — Los misterios de las ciénagas procuran explotarse por sorpresa.
- 13.— *Las aguas subterráneas en el articulado propuesto.* — En seis artículos quedan incorporadas con toda precisión. — Breves notas justificativas lo aclaran. — Se respeta la concisión que procuran los reformadores, sin aumento de artículos. — Depuremos la terminología. — Recomendemos acierto de metodología.

CONCLUSIONES.

INTRODUCCIÓN

Al estudiar ⁽¹⁾, en fecha reciente, « El problema del agua en la región árida de la Argentina » y tratar del aprovechamiento de las aguas subterráneas, nos hemos ocupado exclusivamente de su aspecto físico, del lamentable abandono en que las mantenemos, del contraste que su reducida utilización presenta comparada con la amplitud de la alcanzada en otras naciones, y de las posibilidades que estas aguas perdidas ofrecen para crear importantes riquezas, al mismo tiempo que para provocar favorables modificaciones climáticas locales, con evidentes beneficios generales, económicos y sociales de toda índole.

Nos hemos abstenido expresamente de contemplar el aspecto legal de estos aprovechamientos. Entendíamos que nuestra legislación, dentro de su laconismo y por ahora, ofrece todo lo que el país reclama de ella, siempre que su interpretación práctica, reglamentaria y administrativa, sea correcta e imparcial, inspirada en ese concepto de moral que toda buena ley procura concretar para regular, con justicia y equidad, los intereses en juego entre particulares y los de éstos frente al estado que tutela los de la comunidad. Interpretación que ha de ser hecha, desde luego, bajo la influencia preponderante de la técnica que la realidad orienta y define con mayor precisión que el sentido gramatical de los textos legales, casi invariablemente mal interpretados por los reglamentos y ordenanzas regionales, redactados y sancionados, las más de las veces, por los mismos interesados en resolver o consolidar sus propias situaciones personales, con absoluto olvido de los intereses generales.

Circunstancias nuevas despiertan nuestro deseo de aportar algunas reflexiones respecto a este aspecto complementario del tema que

(1) Memoria inédita. 1936.

habíamos considerado incidental, dentro del más amplio allí analizado para mostrar el despilfarro que hacemos de las aguas, en general, y de las subterráneas, muy en particular, debido a una desorientación que, desde sus horas iniciales, preside el proceso planteado, casi treinta años atrás, para establecer un mayor equilibrio económico entre el interior árido y el litoral húmedo, y que se pretende alcanzar a fuerza de millones invertidos en obras mal concebidas, peor construídas y luego sometidas a una explotación deplorable.

En efecto, los eminentes juristas designados en 1926 para realizar la revisión, ilustrada y serena, de nuestra gran ley civil, se han expedido; y el P. E. ha entregado el proyecto de reformas que han formulado a la consideración del H. Congreso. Este ha designado ya una comisión interparlamentaria para estudiarlo. Varias son las colaboraciones que se le aportan, muchas las enmiendas que ya se proponen y muy serias las responsabilidades que le incumben.

En este especial capítulo de las aguas, las reformas no vienen promovidas por intereses lesionados que sean legítimos, por conflictos previamente discutidos con amplitud, por aspiraciones regionales exteriorizadas en alguna de las formas habituales de publicidad que llegan, con frecuencia, al extremo de apelar a la existencia de fuerzas vivas que desaparecen cuando deben contribuir a cualquier pago, ni por sentencias judiciales que hayan revelado complicadas controversias de interpretación. Nada de esto existe en región alguna del país.

Sin embargo, la IV Conferencia Nacional de Abogados, reunida en Tucumán a mediados del año pasado, en deliberaciones que, entre excursiones y banquetes, sólo ha tardado seis días en pronunciarse sobre múltiples cuestiones de legislación general, incluye un extenso programa tendiente a introducir, a raíz de discusiones que se han calificado de acaloradas, numerosas reformas en la legislación de aguas en vigor y, entre ellas, unas pocas sobre aguas subterráneas.

Este movimiento de opinión, más parece el resultado de especulaciones entre estudiosos que se desenvuelven en un mundo fuera de nuestra realidad nacional, que buscan inspiraciones en legislaciones apropiadas a otras naciones, o que proceden bajo la impresión de erróneas preocupaciones locales, por olvido de que el aprovechamiento de las aguas es función esencialmente técnica, y que a ésta corresponde primar en la interpretación práctica de los textos legales. En algunos casos representa el sentir de asesores oficiales que, en las provincias o en el gobierno nacional, son los responsables di-

rectos del caos que, en esta materia de aguas, se ha denunciado repetidas veces en ambas Cámaras del H. Congreso y que el mismo P. E. ha tenido que admitir en una interpelación reciente.

Abrigamos la esperanza de poder demostrar que, en esta especial materia, nuestra legislación civil es un modelo que las provincias debían respetar y cumplir, no sólo por ser excelente sino por disponerlo la Constitución nacional. Y en cuanto a las subterráneas se refiere, en su interpretación cabe la solución de todos los conflictos posibles en cualquier región del país, dentro de la unidad del régimen legal establecido y que constituye una de sus mejores características. Perseguida por el codificador con una visión muy clara de los intereses generales del país, lo fué en una época propicia en que dominaba un justificado propósito de organización nacional, de espíritu muy por encima de los localismos impuestos por el caudillismo y la anarquía en franca decadencia desde aquella hora histórica, y cuyos últimos resabios se exteriorizan en aquellas intentonas reformadoras.

Al entrar en este estudio sigamos el acertado consejo de Michelet cuando recomienda « que l'Amérique ne regarde pas trop vers l'Europe mais vers elle-même ». En materia de aguas es advertencia doblemente oportuna, pues en campo virgen como el que se ofrecía al codificador y sin derechos adquiridos de ninguna clase sobre ellas, sin apartarse de unos pocos postulados básicos y de sentar algunos preceptos esenciales, pudo asegurar la elasticidad de una reglamentación apropiada a la diversidad de los ambientes físicos regionales del país, susceptibles de sucesivas enmiendas, inspiradas en el bienestar general, pero siempre respetuosas de aquella admirable legislación directiva superior para poder prescindir de los intereses particulares.

I. — UNIDAD DE NUESTRA LEGISLACIÓN CIVIL DE AGUAS

Traduce fielmente una realidad de orden físico. Las aguas, en todo momento de su proceso de circulación natural entre la Tierra y su atmósfera, bajo la influencia de idénticas fuerzas exteriores, se presentan siempre en el mismo estado. Este responde a su vez, exclusivamente, a factores particulares y a fenómenos generales que afectan a aquellos dos ambientes. Pluviales o de deshielo, superficiales o subterráneas, marítimas o fluviales, durmientes o corrientes, continuas o discontinuas, freáticas o surgentes, semisurgentes o ar-

tesianas, potables o mineralizadas, frías o termales, etc., son siempre aguas de idéntico origen que han sufrido influencias de distinto carácter durante aquel inevitable proceso natural.

Su clasificación no interesa al codificador que ha dejado amplia libertad de reglamentar su uso y goce por las personas particulares, «dentro de las disposiciones del código y de las ordenanzas generales y locales», sin que éstas puedan alterarlo o contrariarlo. Es evidente que las cláusulas reglamentarias serán distintas para las diferentes clases de aguas; pero los preceptos legales esenciales serán siempre los mismos, pues se aplican a una misma materia prima que sólo ha podido sufrir la modificación de sus cualidades originarias durante aquel proceso de circulación.

Esa misma unidad es indispensable por otra razón práctica, también de orden físico. Para no citar sino un ejemplo de los que pueden repetirse para cada una de las clasificaciones enumeradas que, por otra parte, no son todas las posibles, ¿dónde estaría la separación precisa entre las aguas superficiales y las subterráneas? Si para el técnico son de esta última categoría cuando circulan bajo tierra, para el codificador el cambio de nombre operado en camino no puede alterar su naturaleza jurídica. A las ordenanzas, en todo caso, incumbe la tarea de interpretar los hechos para amoldarlas a las necesidades: es tarea esencialmente técnica.

Basta haber tenido la oportunidad de recorrer cualquier quebrada en que se inicia la formación de una corriente de aguas superficiales para observar que, desde el lento estilicidio producido en el más modesto goteadero hasta la más abundante fuente, siempre se denuncia el derrame de aguas subterráneas: no es posible admitir que en el preciso momento de brotar a la luz se vean sujetas a cambiar de régimen legal. El problema se reproduciría para la misma corriente en las sucesivas *cortadas* de muchos de nuestros ríos de la región árida, con escurrido alternativamente superficial o subterráneo, y con otros tantos y frecuentes cambios de régimen legal.

Por otra parte, concluído el deshielo o agotado el descenso superficial de las aguas pluviales, la única alimentación de ríos y arroyos, durante la mayor parte del año, proviene de aguas subterráneas. En las distintas estaciones ¿cambiaría el régimen legal de las aguas? ¿Se verificaría en fechas astronómicas fijas o en climáticas variables? No es posible concebir falta de unidad en la legislación general, aun cuando las ordenanzas y los reglamentos que respetan sus disposiciones contengan normas y métodos de explo-

tación variables, al infinito, como lo son los ambientes físicos que ofrecen las distintas regiones de nuestro extenso y privilegiado territorio.

¿A partir de qué temperatura serían termales y sometidas a una legislación especial? ¿Qué grado de salinidad las haría mineralizadas y sujetas a diferentes normas legales? ¿Cuándo pasarían de la legislación civil a la de minas, como pretenden algunos? Estos y muchos otros interrogantes despertarían problemas prácticos de imposible solución legal provocados por la misma ley que, por propia definición, debe tender a suprimirlos. La sencillez y la claridad, últimos términos de la experiencia, son atributos de toda verdadera ciencia: el código debe ofrecer ambas cualidades si aspira a traducir una estructura, a la vez, jurídica y científica.

Dijimos que nuestro codificador pudo imponer esta unidad de legislación en hora muy oportuna. Se apartó resueltamente de Goyena quien, en el art. 489 de su proyecto de Código civil, pretendía establecer reservas a favor de «quienes tuvieran derechos adquiridos por título o por prescripción, en el momento de regir la nueva ley»; igualmente «en favor de la apropiación privada del agua de una fuente por el dueño del terreno» (art. 488). Vélez Sársfield, en cambio, no reconoció derecho adquirido de ninguna clase en el país, ni al uso ni al goce de las aguas, ni mucho menos sobre su propiedad.

Aun cuando la Suprema Corte de Justicia de la Nación lo ha confirmado ⁽²⁾ desde 1886, Lobos muchos años después, escribía ⁽³⁾ que «las legislaturas provinciales no han cumplido con la obligación constitucional de proceder con el mismo criterio». De aquí los repetidos esfuerzos que intentan las provincias para afianzar acomodos locales y que, en cuanta oportunidad se les brinda, renueven sus tentativas para patrocinar enmiendas en la legislación civil y hasta para substraer de la misma todo cuanto se refiere a ellas.

El codificador no admitió otra excepción en favor de una apropiación privada de las aguas que la expresamente establecida en el art. 2350 de su código, tomado de la Ley 19, Tít. 15 de la Partida 3ª y que reza así: «Las vertientes ⁽⁴⁾ que nacen y mueren dentro de una misma heredad pertenecen en propiedad, uso y goce al dueño

⁽²⁾ Juicio P. Ovalle c/ provincia de Mendoza. Tomo 30, pág. 447, 1886.

⁽³⁾ *An. de la Fac. de Derecho y C. Sociales*. Tomo II, pág. 27, 1902.

⁽⁴⁾ Término que no tiene el sentido que se pretendió darle para substituir el de «aguas», pues son éstas las que vierten.

de la heredad ». Obsérvese que se trata de aguas subterráneas ⁽⁵⁾ que pasan en apropiación privada mientras son superficiales, pues desde el momento que « mueren » vuelven a ser subterráneas y se reintegran al dominio público, del que han salido únicamente si el derrame superficial se ha verificado dentro de los límites de la misma heredad. El concepto de propiedad sobre esas aguas comprende implícitas las facultades de su « uso y goce », palabras que han podido suprimirse del texto si no hubiera querido recalcar que al uso y goce previstos con todas las de dominio público, se agregaba, en este caso especial, aquel más amplio atributo de propiedad, no obstante las restricciones impuestas y que haremos resaltar enseguida.

El art. 2637 confirma el propósito animador del código cuando se refiere a « las aguas que broten en los terrenos privados », tan subterráneas como aquéllas; y aclara que « el simple hecho de correr por los terrenos inferiores, no da a los dueños de éstos derecho alguno », precepto acentuado una vez más, aun para el caso en que existan intereses generales afectados. Pues, en efecto, establece que entonces « están sujetas a expropiación por utilidad pública », cuando « fuesen el principal alimento de un río, o fuesen necesarias a algún pueblo », afirmación que pudo suprimirse, ya que si existe una causa de utilidad pública que justifica la medida, el recurso de la expropiación es siempre aplicable.

El código enumera las facultades inherentes a este derecho de propiedad con toda amplitud. Puede ejercerlas aun cuando afecten al vecino « con tal que no ataque su derecho de propiedad » (art. 2514). Como por virtud del art. 2518: « La propiedad del suelo se extiende a toda su profundidad, y al espacio aéreo sobre el suelo en líneas perpendiculares », esto es más científicamente « entre líneas verticales », se deduce que todas las aguas, superficiales o subterráneas, caen en el dominio privado, « si *nacen y mueren* dentro de una misma heredad », tres extremos que han de cumplirse para satisfacer el precepto legal.

Anotemos, de paso, que al ilustrar este art. 2514 el codificador recuerda la ley romana que autorizaba a « abrir un pozo en *mi casa*, aunque por eso se corten las aguas que filtran al fundo vecino y le traiga el perjuicio de secar los pozos o las fuentes de la propiedad contigua », liberalidad que se restringía en la ley de Partida para el

(5) Según propios términos del mismo art. 2350.

caso de intención aviesa del último alumbrador, pero que nuestro codificador no ha reproducido en su propio articulado ni directa ni indirectamente en ninguno de sus aspectos. Por otra parte, un pozo por casa define una reducida provisión para uso doméstico y nada más. No es el mismo caso de la heredad en que las aguas nacen, corren y mueren dentro de los límites de la misma, en extensión siempre mayor que el patio de aquélla.

Es fácil establecer cuándo las aguas superficiales nacen y mueren; y si lo hacen o no dentro de la misma heredad. Para las subterráneas, si al sancionarse el código no era posible hacer otro tanto, hoy los progresos de la técnica nos permiten una determinación idéntica, por ahora, más costosa quizá, pero precisa, pues la coloración por la fluorescina, ftaleína derivada del xanteno, nos permite revelaciones de notable exactitud. Podemos, para unas y otras aguas, determinar si nacen y mueren dentro de la misma heredad y llegar a identificar con igual seguridad las de carácter privado. Es decir, separar, por un lado las aguas de origen lejano que sería injusto hacer caer en el dominio privado, y por otro las que tienen un proceso de circulación tan limitada como el reconocido a las superficiales privadas.

Podemos afirmar que, en materia de dominio, la unidad de legislación resulta muy clara. Cuando el código se refiere a las aguas subterráneas, o las comprende en sus disposiciones, se descubre una perfecta armonía en los preceptos legales a que responden éstas y las superficiales. Veremos que bajo otros aspectos la misma correlación subsiste.

II. — SEVERAS RESERVAS OPUESTAS CON RESPECTO AL DOMINIO PRIVADO DE LAS AGUAS

Hemos dicho que este derecho de propiedad no se ejerce sin múltiples restricciones legales. Cuando su dueño deja correr las aguas que brotan de fuente y vierten en su predio, aguas subterráneas, conforme al art. 2638 no puede emplearlas en « un uso que las haga perjudiciales a las propiedades inferiores »; correlativa es la disposición del art. 2632 cuando se trata de aguas de pozo, pues en tal caso, conforme al art. 2633, debe asegurar su derrame « sobre terrenos que le pertenezcan o sobre la vía pública ». El art. 2650 establece, por otra parte, que « cuando salieren al exterior » por trabajo del hombre, esos mismos terrenos inferiores están obligados a

recibir las aguas subterráneas, taxativamente enumeradas y provenientes de «fuentes, pozos artesianos, etc.», pero sólo en caso que no resulte posible «por su abundancia contenerlas en el terreno superior», y entonces previo el pago de «una justa indemnización de los perjuicios que puedan causarles». Esta cláusula completa la del art. 2648 que define una situación distinta de la que establece el art. 2647 para «las aguas que *naturalmente* descienden de los terrenos superiores».

Los art. 3104 a 3107, enfin, se refieren a restricciones que reglamentan el uso del agua de «fuente, aljibe o pozo» de importancia reducida, superficiales y subterráneas. Es el tradicional derecho de «chafa», humanitario y casi religioso que los musulmanes llevaron a España, de donde pasó a toda la América hispana y que nuestro codificador, ante la escasez de población del interior, las grandes distancias a recorrer, las pocas aguadas, abrevaderos y pozos distribuidos en nuestras extensas travesías áridas, aceptó sin las restricciones de la ley española de 1866 que le inspiraba en esta materia.

La primer y única distinción que acepta entre las aguas, más propiamente que a ellas, se refiere al alcance de la restricción del dominio en los terrenos inferiores sujetos a recibirlas. En efecto: son diferentes las situaciones si descienden por causas *naturales* o por causas *artificiales*, sin que, en este último caso, la altere el hecho de que el trabajo del hombre sea *superficial*, como en la excavación de un canal o sólo sea para avivar una fuente y aumentar el caudal de su derrame, o sea *subterráneo*, como en la perforación de un pozo, con o sin galerías auxiliares, cuyo carácter tampoco le interesa mayormente. Obligatorias estas prescripciones en ambos supuestos, es *gratuita* en el primero, *indemnizada* en el segundo: no puede haber mayor equidad, justicia y precisión al contemplarlas.

En cuanto a las aguas, todas son bienes públicos de la Nación o de las provincias, con la única salvedad a que se refiere el art. 2350 a favor de la apropiación privada de las superficiales y el art. 2518 para las subterráneas, aun cuando los términos sean más claros para el sistema hidrológico *visible* que para el hidrogeológico *invisible*, hoy algo mejor conocido el primero que el segundo. En ambos las aguas son subterráneas, por *sobre* el nivel en que vierten en el primero o por *debajo* en el segundo. En ambos casos esta apropiación es restringida en razón de los términos contenidos en el texto del articulado del código.

Así, por ejemplo, si dentro de su heredad el dueño utiliza el agua, forzosamente desviada, cualquiera que sea el aprovechamiento a que la destine, ejerce su derecho sin que pueda impedirlo el propietario inferior, en ninguna época, aun cuando éste la haya usado, ya que lo haría sin derecho alguno y por ello sin dar margen a indemnización ⁽⁶⁾. Si dentro de su heredad no puede usar las aguas de su fuente por dificultades topográficas, compra una inferior a la que alcanzan pero deja otro fundo intercalado, no puede utilizarlas como propias, desde que no se cumple el precepto legal de verificarse todo el proceso dentro de « una misma heredad » ⁽⁷⁾. Si por cualquier causa la heredad con agua propia se fracciona entre varios, las aguas no pueden distribuirse sin perder su carácter de privadas, salvo que estas transferencias no hayan afectado las tierras beneficiadas por aquella apropiación. Si las vende a un vecino que las aparta de su vaguada natural crea una situación que las hace perder su dominio privado, ya que mueren fuera del predio en que nacen y pasan al público por esta sola circunstancia.

Muchos otros casos podrían presentarse para demostrar cuán restrictiva es esta apropiación privada que no ha estado en la mente del codificador favorecer más allá de lo más estrictamente indispensable. Por otra parte, es evidente que el crecimiento de la población y la subdivisión de la propiedad que es su forzosa consecuencia, harán perder importancia a estas reservas de la legislación general de aguas, así como para hacer desaparecer los inevitables conflictos de vecindad que puedan provocar. De igual forma contemplaremos las aguas subterráneas, protegidas cuando son privadas, pero del dominio público cuando afectan derechos de terceros, esto es, o por nacer fuera de los límites de la propiedad, o por morir en las mismas condiciones, o por realizarse los dos extremos a la vez.

La única y verdadera solución plausible para evitar aquellas dificultades, dentro de las ordenanzas y reglamentos locales, consiste en declararlas públicas desde que aparecen intereses afectados fuera de la heredad favorecida por una fuente, o por la abundancia de las aguas de un pozo. Es declaración que puede hacerse de oficio a mérito del poder amplio de policía que incumbe al estado, o que

⁽⁶⁾ Fallos de la Sup. C. de Just. de la Nación, juicio J. Acuña c/ A. Alvarez en Catamarca, Tomo 63, pág. 291, 1897.

⁽⁷⁾ Acuerdo de la Junta Sup. de Irrig. de Tucumán, juicio M. Paz c/ M. Alurralde, Choromoro, bajo n/ presidencia, 1903.

gestionarán los mismos interesados cuando la experiencia demuestre las ventajas de la explotación de las aguas por comunidades bien organizadas, tarea de educación objetiva y de beneficios sociales que debemos inculcar para el aprovechamiento de todas las aguas públicas indistintamente.

Es un procedimiento que, por otra parte, se aplica no solamente a las aguas sino a las obras que su explotación reclama o que han provocado su alumbramiento, cualquiera que sea la clase de pozo perforado. Su expropiación, fundada en el interés que despiertan las aguas utilizables por varios, su pago a prorrata por todos ellos y su explotación en común, salva todas las dificultades. Es la misma forma que se usa, cuando existen ordenanzas previsoras, con el canal particular de un vecino que se declara comunero desde el momento que puede servir a varios que se incorporan a la nueva comunidad creada, previo pago de su cuota proporcional en el costo de la transferencia del dominio del canal de privado en público. A medida que el sistema hidrogeológico se conozca mejor, su explotación, armonizada o no con la del superficial, resultará más eficaz, y el ejercicio del poder de policía del estado se hará con la misma amplitud y libertad que puede y debe aplicarse para la explotación de las aguas superficiales.

En síntesis, para nuestro codificador « todas las aguas que corren por cauces naturales », son bienes públicos (art. 2340, inc. 3º). Es declaración que comprende las subterráneas que « corren », en general, más lentamente que las superficiales, en razón del medio en que actúan, pero como ellas por « cauces naturales ». Con clara visión del porvenir se ha anticipado a Francia que, recién en 1932, ha conseguido alcanzar esta unificación de la legislación de aguas en Marruecos, la más nueva de sus colonias del norte africano. Ha tardado más de un siglo en escalar reformas en Argelia y Túnez, introducidas en su propia legislación que pretendió implantar en otro ambiente sin resultado práctico alguno. Sin embargo, a ella recurren muchos de nuestros estudiosos para fundar sus críticas a nuestro admirable régimen legal, o para interpretarlo conforme a sus deseos o necesidades profesionales. Debemos conservar el nuestro en toda su pureza y aportar a su texto algunos insignificantes retoques que señalaremos oportunamente para aclarar o hacer más precisas algunas de sus juiciosas disposiciones.

III. — CRÍTICAS INFUNDADAS AL PRIVILEGIADO DERRAME DE LAS SUPERFICIALES

El problema jurídico de las aguas no debe resolverse en el silencio del gabinete ni en abstracto. Es un problema de aplicación práctica y de verdad utilitaria: es en el terreno y al pie de la fuente, a la vera de la corriente o al borde del pozo, donde debe ventilarse y resolverse. Por no proceder así se multiplican las objeciones teóricas, se plantean y complican casos de sencilla solución racional, se confunden las disposiciones legales con las de puro reglamento, y se acuerda inusitada importancia a incidencias que sólo mueven situaciones particulares e interesadas al margen de la moral; y que la desorientación general que impera en todas las cuestiones que se refieren a las aguas llega al extremo de tolerar, durante los 70 años corridos, leyes y ordenanzas provinciales contrarias al código en vigor.

En efecto y a simple título de ejemplo, recordemos que se sostiene que las aguas del art. 2637, no obstante su texto claro y preciso, pueden ser aprovechadas, libre y gratuitamente, en uso y goce en los terrenos inferiores, y hasta adquiridas en propiedad por prescripción treintenaria a mérito de la servidumbre a que se refieren los arts. 3093 y 3017 ⁽⁸⁾. Se reconoce que esta interpretación no está «claramente admitida» por el código, pero a pesar de ello se la reputa necesaria por consideraciones de carácter económico. Se afirma que la incuria del dueño de la fuente o la abundancia de las aguas que no alcance a utilizar importan una rémora para el progreso, o una pérdida efectiva de riqueza; y ello pone al vecino inferior en situación de privilegio, al extremo de no precisar la autorización indispensable para el uso y goce de las aguas de dominio público.

En tal caso, se afirma, hay que imponer una restricción al legítimo privilegio y derecho del superior, fijar una medida al beneficio legal que se le asigne, y a partir de ese límite, por demás arbitrario, disponer del sobrante de agua y distribuirlo a la comunidad, a título gratuito por razón de fomento sin que ello importe caer en la práctica del comunismo vulgar, sino en la más sencilla de desnudar a un santo para vestir a uno o más que ya no lo serían tanto. Ni para los más sagrados intereses generales, por eso públi-

(8) M. F. CASTELLO, tesis sobre «Legislación de aguas», pág. 45, 1921.

cos, se ha tenido la peregrina ocurrencia de fundarse en que, si un propietario pudiente no puede seguir sosteniendo su palacio o lo conserva mal, debe dejarlo a los vecinos o al estado que lo necesitan o ambicionan, sin antes convenir directamente su adquisición, o resolver su expropiación, en ambos casos previo reconocimiento de utilidad pública.

Se admite, sin embargo, que el derecho del dueño del predio superior sobre sus aguas es privilegiado en el sentido de que puede aprovecharlas a satisfacción, mudar la dirección de su escurrido natural y, agregaremos nosotros, levantarlas por cualquier medio, mecánico o no, si lo estima necesario, para utilizarlas en terrenos situados a más alto nivel, dentro de su predio, todo ello en cualquier momento que considere oportuno. Pero se pretende establecer que el uso continuado de las aguas excedentes, «hará prescribir a favor del dominio público la propiedad de la vertiente» para beneficiar los propietarios inferiores, en plazo de 20 años, a mérito del art. 2651 que así lo fija para algunas obras que no son aguas, o mejor aún de 10 años, sólo por parecer preferible a un asesor letrado nacional. Se considera absurda la expropiación que exige el codificador para el caso de ser las aguas «el principal alimento de un río», o cuando son «necesarias a algún pueblo», por el temor de que la diligencia se produzca a destiempo, o que no haya quien pague la indemnización, o que no se sepa si se expropia la fuente o el agua.

Cualquiera que sea el carácter público o privado atribuido al agua, no es la restricción del dominio de propiedad en los fundos inferiores la que está en juego, sino el uso o el goce que pueda o no hacerse de aquélla. Hace ya más de medio siglo que el procurador general de la Suprema Corte de Justicia de la Nación, en un dictamen en que hacía mérito de un brillante alegato de quien fuera más tarde su presidente ⁽⁹⁾, escribía que el demandante «ha necesitado inventar una teoría para su uso particular», esto es, descubrir la existencia de «una servidumbre de aguas», tentativa que merece al Dr. Ed. Costa esta lapidaria conclusión: «ni en nuestra legislación, ni en legislación alguna del mundo hay tal servidumbre de aguas» ⁽¹⁰⁾.

Si las de la fuente salen del predio en que nacen y corren por cauce natural, son públicas; pero como pueden no salir cuando quie-

(9) A. BERMEJO, «Aguas del dominio público», 1885.

(10) Juicio Ovalle c/ provincia de Mendoza, Fallos. Tomo 30, pág. 444, 1886.

ra usarlas su dueño por virtud del privilegio que le acuerda la ley sobre ellas, el estado no puede tomarlas para acordar permisos a su uso o goce, sin antes hacer desaparecer ese privilegio con una expropiación, fundada en reconocida utilidad pública. La Corte, en el juicio recordado, declaró que el permiso acordado a los particulares es un simple acto de policía y de administración, revocable por su propia naturaleza, cuando las necesidades públicas exijan disposiciones diferentes y aun contradictorias, más aun si lo reclama el privilegio recordado. La apropiación privada no es posible en caso alguno, ni siquiera por prescripción: las aguas públicas no pueden ser objeto de adquisición (art. 3952); no están en el comercio (art. 3902), y no pueden apropiarse por prescripción (art. 3951).

Tampoco es cuestión que pueda resolverse directamente entre particulares. Si, por venta u otra convención, el agua no nace y muere en el mismo predio, no se cumple el precepto legal y aquellos actos son sin valor alguno. Si la autoridad, cualquiera que sea la jurisdicción en que se encuentra el agua, a solicitud de parte interesada, o por propia iniciativa, reconoce que hay riqueza malograda, conveniencia en no reducir o en engrosar el caudal de derrame de un río, o en asegurar la provisión a un pueblo, sin necesidad de esperar años para especular con la indolencia o la indiferencia del dueño del predio favorecido por la fuente, declara la utilidad pública de las aguas y justifica la expropiación. Como hemos dicho, prorratea el monto de la indemnización entre todos los interesados que la costean proporcionalmente a sus intereses, esto es a la magnitud de sus respectivos permisos, ya incluído el usuario superior cuyo privilegio desaparece y entra a formar, como uno de los tantos, en la comunidad que constituyen todos, dentro del mecanismo regido por la ordenanza o reglamento local que detalla todas las demás disposiciones propias de una administración de orden. El mismo pueblo servido, en su caso, entra en la comunidad representado por su intendente, o por quien designen sus autoridades municipales, o por el que directamente nombren los mismos usuarios urbanos, sometidos a su propio reglamento interno para explotar el agua, correcta y legalmente obtenida, sin reforma alguna del código y por un sencillo procedimiento administrativo normal.

¿Qué es la fuente o el agua lo que se expropia? Para responder basta preguntar al que adquiere una propiedad en que el agua es indispensable, si admitiría que, en la escritura de transferencia, le vendieran las obras de derivación con sus compuertas respecti-

vas, sin hacer mención alguna del permiso al uso y goce de aquélla. Solamente nuestros bancos oficiales aceptan escrituras con tan grave falla y a pesar de sus nutridos departamentos letrados. Inútil juego de palabras y olvido completo de los conceptos que ellas deben traducir: la fuente es la boquera natural por donde sale el agua, brote o vierta, la única cuyo uso y goce interesa en realidad y en cualquier caso.

En resumen, el código en vigor ha asegurado la unidad de su estructura jurídica en materia de aguas, al declararlas *todas* de dominio público, sin apartar las subterráneas sino muy al contrario; y la ha acentuado al hacer extensivas e idénticas las restricciones al dominio de propiedad impuestas en los terrenos inferiores para todas ellas indistintamente. Ha sabido aprovechar la oportunidad que las circunstancias y el ambiente le brindaban para no reconocer derechos adquiridos de ninguna clase en materia de aguas. Cuando hizo excepción a esta regla general en favor de algunas muy escasas privadas, lo hizo en términos sumamente restrictivos, sin olvidar las subterráneas, en época en que recién empezaban a interesar la legislación de otros países densamente poblados, sin afectar ni destruir aquella unidad fundamental. Los reparos que se han opuesto a algunas de sus disposiciones, inspiradas por los comentadores de algunas legislaciones que responden a otros medios físicos que el nuestro, no resisten a la crítica más superficial; y las situaciones que plantean tienen todas su solución práctica, legal y administrativa, dentro de sus propios preceptos esenciales de equidad y de justicia. Examinemos las reformas más serias que se pretende aportarle, por ahora, en nuestro especial tema de las aguas subterráneas.

IV. — EL *Anteproyecto* MANTIENE LOS PRECEPTOS SOBRE DOMINIO

Analicemos las iniciativas fundamentales, el «*Anteproyecto de reformas al código Civil*» del Dr. Bibiloni primero y el «*Proyecto de la Comisión Reformadora*» después, en el capítulo de las aguas subterráneas, y más que en su contenido jurídico, en el terreno de su adaptación a nuestro ambiente físico, húmedo y árido a la vez. En materia de aguas en general es circunstancia que reviste preponderante influencia y que, no obstante nuestro propósito de concretarnos a las subterráneas, nos impone algunas referencias incidentales pero indispensables respecto a las superficiales, tan naturalmente identificadas con aquéllas.

No es de nuestra incumbencia profesional, ni interesa a nuestro objeto dominante, analizar el acierto de las modificaciones introducidas en el articulado de ambos documentos, para responder a una metodología distinta de la que inspiró el código. Son los conceptos exteriorizados en el texto de las reformas propuestas, y el grado de armonía que presentan con los conservados y reproducidos del mismo, los que procuramos hacer responder a la realidad de nuestro variable ambiente físico propio, sin hacer predominar las necesidades del húmedo sobre las del árido, o viceversa. Pero hay algo más.

Todos los universitarios somos peritos obligados llamados a asesorar a la justicia. Para hacerlo con la eficiencia que reclaman los intereses que se ventilan ante ella y prestigiar las sentencias de sus insustituibles intérpretes, los códigos deben hablar un idioma que todos entiendan por igual, sin preocuparse de recoger el que satisfice al vulgo. Los términos que traducen hechos deben definirse con justeza, ser claros y precisos, esto es correctos a juicio de las técnicas respectivas más que al de la Academia de la Lengua. Aun en su más moderna edición, sólo puede servir para una orientación general, pues falla, muy en especial, en las sinonimias que, muchas veces, no resisten al análisis y a la crítica más moderada. La corrección de un término, en su caso su definición incidental en el articulado o en nota marginal, aparte de la frase exacta y su giro acertado, perfeccionan estas obras de vida secular y de enorme influencia social, ahorran controversias fundadas en interpretaciones provocadas por la obscuridad de una sola palabra, gastos y demoras. Antes de ahora, hemos hecho resaltar imperdonables errores del género cometidos en este *Anteproyecto* ⁽¹¹⁾. No es ésta, sin embargo, tarea que nos propongamos realizar: precisados los conceptos esenciales, acordados los artículos aceptables, sólo a ellos dedicaremos la atención necesaria para intentar esta última depuración de forma.

Examinemos las cláusulas del *Anteproyecto* relativas al dominio privado sobre las aguas subterráneas y las reformas que propone para restringir las facultades del privilegio que entrañan. En su art. 9 del título I reproduce textualmente el art. 2350, sin comentario alguno ⁽¹²⁾; de modo que «las vertientes que nacen y mue-

⁽¹¹⁾ *La línea de ribera legal*, «An. Soc. Cient. Arg.», tomo CXVII, página 161, 1934.

⁽¹²⁾ J. A. BIBILONI, *Anteproyecto de reformas al código Civil Argentino*, Libro III, pág. 36.

ren..., etc.», aguas subterráneas por su origen, son de dominio privado. En el art. 12 del título IV, inspirado en el texto del código del Brasil, modifica el art. 2518 en que se fija el concepto de la extensión de la propiedad en términos que reproducimos en la parte que nos interesa, pues abarca el dominio de las aguas en el subsuelo del predio, con la restricción contenida en el 2º párrafo. Dice así: «La propiedad de un inmueble comprende todo el espacio aéreo sobre la superficie del suelo y toda la profundidad debajo de ella. No puede el dueño, sin embargo, impedir los actos que se realicen en tal altura o a tal profundidad, que no tenga interés de ningún género en excluirlos» ⁽¹³⁾. Sin duda, ganaría en precisión al decir: «que no tenga interés justificado en excluir», ya que esto tiende a asegurar una medida o límite a ese interés que no puede quedar al arbitrio exclusivo del dueño.

Los dos primeros párrafos del art. 12 del título V, reproducción casi textual de los correlativos del art. 2637, confirman el dominio privado de las aguas subterráneas. Escribe, en efecto: «Las aguas que *surgen* en los terrenos particulares pertenecen a sus dueños y pueden libremente usar de ellas y *cambiar* su dirección natural» ⁽¹⁴⁾. Las dos palabras subrayadas substituyen las del código *brotan* y *mudar*, con intención que luego analizaremos. Mientras tanto, podemos afirmar que ninguna otra alusión especial respecto a las aguas subterráneas vuelve a repetir el *Anteproyecto*.

Pero este silencio no debe sorprendernos en un civilista de prestigio que ha procurado evitar redundancias y reducir la extensión del articulado proyectado. A nuestro juicio, no es posible admitir que las haya olvidado sistemáticamente, sino que se ha limitado a aceptar y refirmar la unidad de concepción del código que estimó suficiente. Ha considerado esas aguas comprendidas entre todas las que corren por cauces naturales, tal cual lo hicimos resaltar más arriba.

Bastaría para confirmar nuestra opinión recordar su intencionada substitución de la primera palabra subrayada en la última transcripción de parte del art. 12. El término *surgir*, en efecto, tiene un sentido distinto de *brotar* que usa el código en su art. 2637. Aquél importa admitir una *presión* que hace a las aguas surgentes o artesianas si alcanzan o pasan del nivel del suelo, o sólo semi-surgentes si no llegan a ese nivel, aguas en todo caso siem-

⁽¹³⁾ Ob. cit., pág. 189.

⁽¹⁴⁾ Ob. cit., pág. 266.

pre ascendentes. En cambio, en las que brotan sólo hay influencia de la gravedad sin presión forzada en el escurrido que se produce al tiempo del alumbramiento, al aflorar el terreno impermeable sobre el que desciende el agua que vierte o brota a la superficie. Con el término *surgir* ha querido expresamente comprender las aguas surgentes, esto es, las más profundas, en general lejanas por su propia naturaleza física. Ciertamente parecerían descartadas las freáticas, esto es, las de las napas superiores y hasta las mismas semi-surgentes que no alcanzan *naturalmente* a la superficie, ni aun dentro del pozo *artificialmente* perforado en todos los casos; pero esto no debe llamarnos la atención frente a la falta de precisión de los términos usados en el *Anteproyecto* que nos ocupa.

Por otra parte, como hemos visto, el art. 12 del título IV que modifica el art. 2518, incorpora las aguas subterráneas al dominio privado mientras se mantienen dentro de los límites del inmueble; su búsqueda puede hacerse sin oposición de su dueño, pues tiene siempre justificado interés en conocer su existencia; y los gastos que ella reclama pueden servir de base al entendimiento previo necesario para hacerlas caer en el dominio público, sin expropiación dentro del procedimiento puramente administrativo recordado más arriba.

Cambiar o mudar al aplicarse a la *dirección natural* del escurrido de las aguas que surgen, no representa esencial modificación de concepto, pero revela una preocupación que no ha sido correctamente traducida. Al reducir el proceso a un simple derrame superficial se restringe el libre uso admitido en la primer parte del párrafo, pues se habla de derivaciones con fines agrícolas con exclusión de todas las otras formas que reclaman los aprovechamientos posibles de las aguas para asegurar su uso y goce, de los que es el dueño árbitro exclusivo. Las palabras «y cambiar su dirección natural» resultan superfluas.

En suma, en nuestra opinión, el *Anteproyecto* no ha alterado la unidad de nuestra legislación de aguas, pues las declara todas de dominio público, con la única salvedad de las mismas privadas que admite el código, de importancia reducida en cuanto a caudal. Esta disminuirá aún más cuando el aprovechamiento de las primeras se someta a la organización racional que reclama el país, y que hará desaparecer múltiples fuentes artificialmente provocadas, muchas veces con maliciosa intención, especialmente en la región árida en que se aprecian las aguas en todo su valor, y los propietarios apelan

a cualquier recurso para intentar pasar las del dominio público al privado, sin medir los perjuicios que ellos mismos se crean. Con reclamar siempre más agua para los regadíos, se aumentan las pérdidas por infiltración, brotan en los terrenos inferiores y forman las apetecidas vertientes que se pretenden hacer privadas, protegidas y definitivas; pero muy luego se transforman en las terribles ciénagas.

V. — DESCUBRIMIENTO TEÓRICO DE CASOS ANORMALES CUANDO SON
PRIVADAS

El *Anteproyecto*, en el último párrafo de su art. 12 del título V ⁽¹⁴⁾ correlativo del art. 2637, convencido que su contenido constituye « una grave y peligrosa inadvertencia del código » en el caso que las aguas privadas alimentan un río o una población, lo modifica y escribe: « Cuando constituyen *cursos* de agua por *cursos* naturales pertenecen al dominio público y no pueden ser alterados ». De este modo introduce un concepto distinto al del código, pero a su juicio, conforme al de los escritores franceses citados en su nota ilustrativa. Para justificar esta reforma admite que el caso contemplado en los primeros párrafos es *normal*: aquí existe dominio privado del agua, de modo que « si se hace necesaria para la población, se tratará de un caso de utilidad pública que autorizaría la expropiación », tal como pasaría con cualquier otro bien privado, por lo que no hace falta recordar el procedimiento legal que ha de adoptarse. Descartado así el caso normal para el que no hay conflicto de interpretación, sólo quedan los dos previstos que califica de *anormales*, esto es « cuando la fuente alimenta un río » o cuando « alimenta una población », sin explicar como distingue esta población de la anterior.

Para estos casos considera indispensable que existan ríos de aguas permanentes y continuas que no exige para el normal, aun cuando, en el primer caso, admite que puedan ser necesarias para alimentar una población sin llenar esa condición. Escribe: que « sólo se califican de ríos a los cursos *estables* de agua », de modo que, contrariamente a toda técnica, no podrían servir las aguas intermitentes recogidas en estanques u otros depósitos para asegurar la provisión de caseríos y villorios; que « la fuente principal del río, es parte y parte esencial del río », pero olvida que un río de aguas permanentes y

(14) Ob. cit., título V, pág. 262.

continuas puede, en sus nacimientos o en alguno de sus afluentes tributarios, no tener ese carácter y prestarse, sin embargo, a alimentar con ventaja una corriente o una población; y que si no hay río y el agua «derrama sin cauce constituye un agua impropia para esa alimentación», aun cuando son éstas, casi siempre, las aguas que aparecen en las fuentes y que al unirse constituyen corrientes utilizables para una cualquiera de las alimentaciones llamadas, sin razón alguna, anormales en el *Anteproyecto*.

En estos dos casos, afirma, «no hay propiedad privada y nada que expropiar para impedir que un particular interrumpa el derrame», contrariamente a la situación real que en la naturaleza se produce con la mayor frecuencia, en que aún los mayores tributarios se forman por la acumulación de aguas privadas que satisfacen los extremos del art. 2637 creado para ellas, con inútil redundancia frente al art. 2350, según dijimos antes de ahora. Recuerda el inc. 3 del art. 2340 y su nota explicativa; y escribe que «en nuestro caso nada hay que permitir ni que indemnizar», tesis exacta pero cuando no son aguas privadas. Por otra parte, observemos que en el caso normal, las aguas tampoco mueren forzosamente dentro de la propiedad en que nacen, ya que los terrenos inferiores sufren una restricción de su dominio al verse obligados a recibirlas; que no se limita esta restricción a una sola propiedad, pues se habla de ellas en plural y no se hace referencia ni a su caudal ni a su destino o aprovechamiento, sino que la restricción proviene exclusivamente del carácter del dominio de la misma agua y no del que afecta a los terrenos que cubren.

La influencia del código francés y sus comentadores en el *Anteproyecto* es evidente. «El curso de agua» es expresión que se lleva a su texto con marcada insistencia. Equivale a nuestro río o riacho, arroyo o arroyuelo según su importancia decreciente, términos más castizos cuyo uso repudia el *Anteproyecto* sin razón alguna. En materia de aguas esa influencia resulta perjudicial en alto grado. El ambiente físico de Francia, con más de 750 mm. de lluvias anuales, resta interés primordial a estas cuestiones. Su legislación fundamental, distinta de la nuestra, no puede servirnos de guía y mucho menos infalible. Con inevitables prejuicios tradicionales pretendió imponerla en sus colonias africanas y, en más de un siglo de ocupación, no ha conseguido amoldarla a su ambiente, árido por excelencia. Sólo en Marruecos, la más nueva de ellas, con la experiencia adquirida en ese medio físico, ha podido imponer esenciales preceptos distintos de los de su propia legislación.

La Argentina, con los dos ambientes contradictorios, no puede adoptar las normas legales de la región húmeda en la árida ni viceversa; y de ahí que, para conservar la unidad orientadora de su obra, el codificador haya tenido que *crear* y no *copiar* servilmente. Cuando hace alguna cita, no es siempre para justificar su propio texto sino para explicar su disidencia o para exteriorizarla en forma expresa.

En Francia sólo son ríos (*cours d'eau*) de dominio público los navegables o flotables (sus aguas y su cauce), debido a la preocupación preponderante de su aprovechamiento en la navegación (art. 538 de su código Civil). Todas las otras aguas, ríos u arroyos no navegables ni flotables, aguas fluviales o de fuentes, de lagunas o pantanos, etc., escapan a ese dominio (art. 641 a 644). Cubren cauces privados; y los propietarios ribereños, con exclusión de los restantes, pueden usar libremente estas aguas (art. 644). Desde el momento que se ejecutan obras para poder usarlas, ellos mismos necesitan autorización administrativa, siempre precaria, de modo que el agua de dominio público, aun si corre sobre terreno privado, conserva ese carácter público como el cauce el suyo privado.

Admirable es la previsión de nuestro codificador que nos ha librado de estos derechos ribereños. Si en Francia no afectaron los intereses de la agricultura es por tratarse de un país netamente húmedo, donde aquélla no necesita agua de riego. Crearon, en cambio, en el aprovechamiento de las aguas para la producción de energía hidroeléctrica, los famosos « *barreurs de chute* » que, durante muchos años, representaron una verdadera rémora para la electrificación económica del país.

Los problemas que contemplan los arts. 9 y 12 del *Anteproyecto*, correlativos de los arts. 2350 y 2637 en vigor, interesan en especial a nuestra región árida más que a la húmeda. En ella debemos buscar nuestra propia experiencia objetiva y apartar con tino las situaciones creadas al margen de la ley civil, muchas veces favorecidas por las mismas ordenanzas locales que ni la respetan ni la cumplen. Por otra parte, más de la mitad del territorio tiene mínima densidad de población y extensos latifundios en que abundan las aguas privadas. El lento pero inevitable progreso que permitirá la más racional utilización de sus recursos naturales traerá, con la subdivisión de la propiedad, la formación de nuevas aglomeraciones humanas o el crecimiento de las actuales, esto es siempre mayores necesidades de aguas. La transformación de las aguadas y otras fuentes de las pri-

vadas en públicas se multiplicará; y las comunidades constituídas para su aprovechamiento en la forma que recordamos antes, despertarán el hábito de resolver *en común* otros múltiples problemas de orden económico y social.

Separar los caudales que escapan al dominio privado y caen en el público, exclusivamente en base al texto del último párrafo del art. 12 propuesto, es técnicamente imposible en la región árida y, en especial, en la del N-O de corrientes intermitentes y frecuentes cortadas. El mismo *Anteproyecto* reclama que la corriente sea *estable* para entrar en la clasificación de río, tal como necesita la navegación de los « cours d'eau » en Francia; pero como la inestabilidad es la característica de los nuestros, enseguida se rectifica y afirma que es de dominio público « hasta la intermitente », evidente contradicción dentro de sus propias definiciones. Un semillero de conflictos provocará el texto propuesto para substituir al del código, más claro y preciso para satisfacer el propósito que lo inspiró, al efecto de señalar, en la región árida, el procedimiento a emplear en el caso de aguas privadas que resulten de utilidad pública con el tiempo y a medida que aumente la población.

Sin peligro alguno es fácil alejar toda duda, cortar controversias y suprimir conflictos. En efecto, es evidente que si las aguas no se clasifican dentro de los términos restrictivos del art. 2350 y primer párrafo del art. 2637, caen en el dominio público; y en tal caso no necesita repetirse el art. 12, por la misma razón que tampoco hace falta el art. 2637 en vigor. Las aguas descartadas en esta forma están comprendidas dentro « de todas las aguas que corren por cauces naturales » del inc. 3 del art. 2340 en vigor y en el correlativo del *Anteproyecto*. La supresión completa del artículo simplifica la cuestión y deja más preciso el alcance real del art. 2350 que así contempla, como lo quiso el código, la situación dominante en la región árida, ya que para la húmeda carece de importancia. Por otra parte, nuestros art. 2647 y 48 unificados completan el concepto.

VI. — EL *Anteproyecto* NO PROTEGE EL DERRAME DE LAS AGUAS EN QUE INTERVIENE TRABAJO DEL HOMBRE

Al considerar el articulado de las restricciones y límites del dominio ⁽¹⁵⁾, el *Anteproyecto* ha suprimido expresamente todo cuanto se refiere a las aguas subterráneas provenientes de pozos, así como

(15) Ob. cit., título V, pág. 262.

el de otras artificialmente traídas a los terrenos inferiores, cuando son debidas a cualquier «trabajo del hombre». Por esta circunstancia, sólo en dos de sus artículos conserva disposiciones sobre aguas.

El art. 13 ⁽¹⁶⁾ reproduce el art. 2647 del código que habla de «las aguas que naturalmente descienden de los terrenos superiores», le incorpora el art. 2638 en que suprime cuanto atañe a las que salen de una fuente, subterránea como hemos visto, para dejar exclusivamente la parte en que se prohíbe el empleo de aquéllas «en un uso que las haga perjudiciales a la heredad inferior»; y para acentuar su propósito agrega: «el propietario superior no puede hacer acto alguno que agrave la sujeción del fundo inferior».

El art. 14 ⁽¹⁷⁾ amolda el art. 2648 al anterior para excluir las aguas «subterráneas que salen al exterior por algún trabajo de arte»; y así suprime los correlativos art. 2632-33 y 34 ⁽¹⁸⁾ que el código destina a confirmar su tesis al efecto de equiparar las aguas subterráneas a las restantes, pero «con una justa indemnización» cuando el dueño del fundo superior no pueda retenerlas, caso previsto en el art. 2650 que el *Anteproyecto* elimina como los enumerados y el n.º 2653 ⁽¹⁹⁾.

Para justificar esta grave reforma, en alto grado perjudicial para la extensa región árida del país, se funda en la opinión del juriconsulto Giovannetti a quien, en el ambiente húmedo de Italia, «no parece equitativo» someter al propietario inferior a recibir las aguas del superior, aun cuando sea con recompensa ⁽²⁰⁾. En cambio, le «aparece» más propio imponerle una servidumbre forzosa, conceder el paso del agua superflua para descargarla en algún curso o de otro modo, «pues así, afirma, el propietario del fundo superior podrá dar salida a las aguas de que ha usado». En su art. 606 el código italiano, no sólo acepta estas vistas sino que amplía y extiende el precepto «a la descarga de las aguas sobrantes que el vecino *no consintiera* en recibir en su fundo», acto supeditado a su exclusivo arbitrio. En el *Anteproyecto* «se ha adoptado el principio general de la servidumbre para todas las hipótesis», sin limitación de ninguna clase.

Es decir que, si un propietario ha conseguido descubrir la pre-

(16) Ob. cit., pág. 268.

(17) Ob. cit., pág. 269.

(18) Ob. cit., pág. 265.

(19) Ob. cit., pág. 270.

(20) Ob. cit., pág. 494.

sencia de abundantes aguas subterráneas en su predio y ha podido llevarlas al nivel del suelo por medios mecánicos, caso de no ser artesianas, no ha terminado. La reforma le impone la obligación de usarlas dentro de su heredad, ya que no puede dejarlas correr naturalmente sobre terrenos inferiores, sin gestionar la imposición de una servidumbre para asegurar su paso al través de las propiedades que se interpongan en su derrame, hasta alcanzar una corriente de agua, o alguna «otra vía de drenaje» que no se define ni descubre en una redacción singularmente complicada y confusa que luego examinaremos.

En la región húmeda, la servidumbre de acueducto resuelve muchos problemas que despiertan indistintamente las aguas superficiales o subterráneas; pero en la región árida, salvo en los sistemas regados, importaría inferir serios perjuicios, y tan luego por expresa disposición legal, al obstaculizar toda tentativa de fomento para la investigación de la riqueza hidrogeológica de la región y su discreta explotación, en las cuales el concurso privado debe resultar de gran eficiencia, una vez dirigido con acierto. Las aguas subterráneas son, en general, de escaso caudal: puntos aislados y dispersos en medio de eriales extensos, aquella costosa obligación para pasarlas de largo, mientras las recibirían complacidos los dueños de los predios inferiores, beneficiados aún en el caso que se infiltraran en sus suelos, importa crear, a sabiendas, una situación contraria a las que el código contempla, inspirado en la vida misma de la región árida.

Es preciso recordar que si el código se hubiera respetado, «las ordenanzas generales y locales» previstas en su art. 2341, habrían permitido depurar el texto y reducirlo ahora a algunas reglas esenciales, aplicables en todo el país y sujetas a la elasticidad de interpretación impuesta por el ambiente local: ni se cumple el código ni sus ordenanzas cuando existen. De ahí la desorientación que se traduce en frecuentes dudas que han debido desaparecer desde años atrás, por estar resueltas por el mismo código con exacto sentido de la realidad. ¿Cuándo hallaremos en toda nuestra región árida, siquiera un caso de comunidad de aguas que, entre 300 usuarios sepan explotar en armonía el insignificante caudal de aguas subterráneas que bastan para satisfacer 62 Ha, como en Aïn Aouillout, en Marruecos?

La atinada disposición del código debe mantenerse en todo su alcance, sin perjuicio de condensar los preceptos que se distribuyen en varios artículos que ofrecen repeticiones frecuentes. Las aguas

pluviales, por ejemplo, para las cuales se establecen artículos especiales, en realidad no los reclaman dentro de la unidad física recordada. Así los artículos que el *Anteproyecto* propone para substituir los arts. 2632-33-34-35-36-38-47-48-49-50-51 y 53 que conserva en el capítulo V de las restricciones y límites del dominio, dentro del concepto más amplio y correcto del código en vigor, pueden concretarse en los términos siguientes:

Art. 2632. — Los dueños de los terrenos inferiores, sin adquirir derecho alguno sobre ellas, están sujetos a recibir:

1. — Todas las aguas que naturalmente descienden de los terrenos superiores, sin trabajo del hombre ni acto alguno que agrave la sujeción impuesta;
2. — Todas las aguas en cuyo derrame intervenga trabajo del hombre, cuando no pueda usarlas o contenerlas el predio superior; pero en tal caso con obligación de pagar una justa indemnización.

Art. 2638. — En ningún caso estas aguas, hayan o no sido usadas, podrán contener materias, por cualquier concepto, nocivas para los usuarios inferiores, en cuyo caso deberán inutilizarse o depurarse antes de salir de los terrenos superiores.

Art. 2649. — Los dueños de los terrenos inferiores están sujetos a recibir las arenas y piedras que las aguas arrastren al escurrirse, sin que puedan reclamarlas los dueños de los terrenos superiores.

Obsérvese que, en cuanto al art. 2638, abarcamos las aguas de cualquier clase de pozo, materias nocivas en todo género de aguas sin limitarnos a las pluviales, así como los perjuicios en todos los usos y goces a que se destinen, sin concretarnos al aprovechamiento doméstico o al industrial que no son todos los posibles con ellas, ni muchas veces los más importantes.

VII. — LA SERVIDUMBRE DE ACUEDUCTO SE IMPONE PARA TODOS LOS CASOS

De una plumada, el *Anteproyecto* suprime doce artículos de los capítulos III y IV del título XIII del código: tratan de las servidumbres en particular (arts. 3093 y 3107), es decir respectivamente de las de recibir las aguas de los predios ajenos y de sacar agua ⁽²¹⁾. Los considera *inútiles* debido a que « todos tratan de cargas independientes de la voluntad de los particulares a quienes se imponen por razones de intereses generales pero a beneficio de otro particular »; y además por estimar que « sin variante », sus disposiciones están previstas en las servidumbres forzosas que in-

(21) Ob. cit., pág. 495.

corpora al capítulo II de las de acueducto ⁽²²⁾. Pretende encuadrarlas en la regla única con que substituye, más directamente, los arts. 3097, 3100 y 3101 y condensa en el art. 22 que propone, redactado en los términos siguientes: « Las disposiciones precedentes se extienden al paso de las aguas llevadas al fundo superior o acumuladas en él, o que provengan de su explotación, cuya evasión, sea necesaria para desaguar el terreno, o para la desecación de lagunas y terrenos pantanosos, o la explotación industrial, agrícola o minera, a fin de llevarlas a un curso de aguas, o a otra vía de drenaje. El paso no puede ser reclamado sino bajo el supuesto de proporcionar a las aguas una corriente suficiente para impedir que se estanquen ».

Este artículo comprende dos párrafos de distinto alcance. El primero intenta una definición del acueducto que, si lo fuera en realidad, debía colocarse como primer artículo del capítulo, en caso de no ser del todo superfluo como veremos enseguida. El segundo, en cambio, es una regla ingenua e inútil por no decir perjudicial. Es la única que se descubre en todo el artículo propuesto, no obstante el anuncio previo de que todo él es *regla de carácter general*.

El acueducto es un simple paso que se asegura al agua y que se impone a los dueños de los terrenos que afecta su recorrido. En el proceso de circulación natural del agua la interposición de un acueducto no altera su condición legal. Sirva para traer agua, sirva para alejarla, las disposiciones legales a observar son siempre las mismas, como lo son las que afectan la expropiación cualquiera que sea la causa que ha determinado la declaración previa de su utilidad pública. El origen de las aguas, superficiales o subterráneas, de lluvias directas o de deshielo, hayan sido o no usadas, encuéntrense o no acumuladas, vayan a satisfacer o no aprovechamientos en bebidas, industrias, regadíos o instalaciones hidroeléctricas, aislados o combinados de a dos o más, lleguen o no a otro acueducto, río, laguna o mar, para cualquier finalidad que persiga, el acueducto es siempre uno sólo ante la ley. Las disposiciones técnicas, en cambio, son tan variables como son los casos en que el acueducto hace falta; y no hay posibilidad de establecer sino orientaciones generales que se derivan de la esencia misma de su destino.

Al técnico corresponde fijar todas las características de cada acueducto, fundado en el estudio del terreno y de los hechos, dentro de las limitaciones legales impuestas por la servidumbre que, aun cuando no se escribiera, se inspiran en el honesto propósito de al-

(22) Ob. cit., pág. 485.

canzar los beneficios máximos con los mínimos perjuicios, cuando no pueden evitarse totalmente. La definición intentada se reduce a nuestro primer párrafo que, por otra parte, no requiere mayor explicación; y por lo elemental no necesita llevarse al texto del código.

La regla que contiene el 2º párrafo tampoco puede aceptarse. En tierras áridas conviene, muchas veces, llevar el derrame de las aguas a depresiones naturales donde se estanquen con el objeto de alimentar napas, freáticas u otras, o bien para favorecer la formación de sedimentaciones útiles para crear parcelas cultivables o plantaciones remuneradoras, forestales entre ellas. Se plantea un problema técnico y económico que no puede quedar sometido a la tiranía de una imprudente disposición legal que, por pretender sentar una regla general, impida soluciones racionales. El ing. Sir Willcocks, el célebre restaurador moderno de la irrigación egipcia, recomendó este temperamento, a principios del siglo, para beneficiar las tierras áridas del Africa del Sur. El artículo propuesto debe suprimirse por entero. El análisis del *Anteproyecto* que se refiere a las aguas superficiales confirmaría plenamente la conveniencia de esta supresión completa.

El capítulo IV del código, con sus arts. 3104 a 3107 que se ocupan de la servidumbre de sacar agua, en cambio, no puede eliminarse: es indispensable para la región árida por las mismas razones que lo impusieron al redactarse. Aun cuando se practica generosamente por deber de humanidad, la población se torna cada vez más heterogénea y conviene respaldar esa tradicional costumbre con una cláusula legal, todo lo concreta que se quiera pero que sea una garantía de tranquilidad para la región y, en especial, en sus grandes travesías sin agua. La reglamentación local pudo hacerla superflua; pero ni las provincias han cumplido con el código, ni lo ha hecho el mismo gobierno federal con el Rural que, desde 1894, rige en los Territorios nacionales. ¿Corresponde al título «del uso»?

En resumen, en el *Anteproyecto* no se destruye la unidad del concepto que ha inspirado al código en cuanto al dominio de las aguas, sean superficiales o subterráneas. En cambio, desde el momento que el derrame se hace indispensable en los terrenos inferiores, la reforma plantea, para las últimas, una diferencia muy grave, al eximirlos de la restricción que impone el código sobre su dominio de propiedad, aun cuando sea con recompensa. Conserva como único recurso y para todos los casos indistintamente, la forma obligatoria de la servidumbre de acueducto, aun en los que la técnica repudia,

en más de la mitad de nuestro extenso territorio. Crea una rémora legal injustificada al retardado aprovechamiento de las aguas subterráneas que las autoridades no han sabido amparar como en otras partes del mundo, más que todo por prevalecer los métodos y rutinas, las creencias y las interpretaciones, los intereses y las resoluciones, administrativas y judiciales del ambiente húmedo que, por razones geográficas no es el de todo el país.

VIII. — LA « COMISIÓN REFORMADORA » FRENTE A LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS

A su respecto se ha expedido con un categórico pronunciamiento. En el comentario que hace del título II de su *Proyecto* y en el que se ocupa de los bienes públicos y particulares, dedica al tema la mayor parte del mismo ⁽²³⁾. Reconoce su importancia al escribir que « ha tenido en cuenta el serio problema que representa para nuestro país, el aprovechamiento y dilapidación del agua subterránea contenida en las napas freáticas y artesianas (surgentes y ascendentes) » ⁽²⁴⁾. Sorprende entonces que, si bien se ha propuesto « depurar el código de las contradicciones y obscuridades que ofrece », concluya por dejar el tema en el silencio más absoluto. Sin embargo, frente a estas aguas se inclina « a colocar en primer término los derechos del estado, sin perjuicio de los correlativos que pudieron concederse en cuanto al uso y goce de ellas al dueño del suelo »; y por eso afirma que se limita « a consignar en éste y otros títulos del proyecto, los casos en que las aguas subterráneas pueden considerarse propiedad privada de los dueños de los terrenos, y las excepciones que era necesario establecer, fundadas en el interés público ». Pero en síntesis, como considera que el problema presenta « serias dificultades », prefiere « dejar a una ley especial el estudio de las reglas flexibles que la materia requiere ».

Para poder analizar esta tesis con acierto agrupemos todas las disposiciones que ha dispersado en su *Proyecto*. En el título II ⁽²⁵⁾ a cuyo comentario pertenecen las palabras transcritas y en los 7 artículos que van desde el nº 117 al nº 123, el silencio respecto a las aguas subterráneas sería completo, dada su expresa referencia al

(23) Reforma del código Civil, Tomo I, pág. 13.

(24) Las cuatro últimas palabras técnicas usadas no lo han sido en su correcta acepción; las aguas subterráneas son: o freáticas o ascendentes. Estas últimas a su vez, son semisurgentes cuando naturalmente no alcanzan al nivel del suelo, o bien surgentes o artesianas si lo alcanzan o sobrepasan.

(25) Ob. cit., Tomo II, pág. 266.

título, si no se hubieran querido incorporar entre « todas las aguas que corren naturalmente » del inc. 3 del art. 118, supuesto que coincide con el que, al analizar el *Anteproyecto*, hemos atribuído a la disposición correlativa del inc. 3 del art. 2340 del código en vigor. En el art. 1471 ⁽²⁶⁾, con alguna reserva sobre el mismo texto del *Anteproyecto*, fija la extensión del derecho de propiedad, sin referirse taxativamente a las aguas subterráneas y reproduce el párrafo final del *Anteproyecto* analizado. El art. 1571 ⁽²⁷⁾ sólo substituye, en el actual art. 2350, los términos « nacen y mueren » por « nazcan y mueran », aun cuando al margen aparecen « nazcan y mueren », términos que no mejoran el texto del código, aceptado por el *Anteproyecto*. El art. 1576 ⁽²⁸⁾, al hablar de aguas que « surjan » emplea el mismo término que comentamos en el *Anteproyecto* al que nos referimos.

Dada la importancia que hemos atribuído a esta substitución, no podemos descubrir cual es su alcance para la Comisión Reformadora, toda vez que la exacta interpretación del párrafo del comentario que hemos reproducido no puede hacerse, sin conocer con precisión, si para ella las aguas freáticas son equivalentes a las surgentes y las artesianas a las ascendentes, o si el paréntesis de su texto califica únicamente así a las artesianas, dos supuestos igualmente erróneos. No menos grave, dentro del concepto general que informa su 2º párrafo, es el privilegio autorizado por ley para el uso gratuito de aguas de dominio público que, en ningún caso, pueden explotarse en tal forma. Eso sólo revela una defectuosa redacción, pues el propósito ha sido, sin duda, de declarar públicas únicamente *los sobrantes*, cuando quiera tolerarlos el dueño del terreno en que surgen: es concepto contraproducente para la finalidad perseguida.

El art. 1578 ⁽²⁹⁾ adopta la tesis del *Anteproyecto* y excluye expresamente « las aguas subterráneas que afloren por trabajo de arte », sin hablar de pozos, entre las que están sujetos a recibir los terrenos inferiores. En cambio, en aquél como en éste, art. 1700, inc. 2 ⁽³⁰⁾, establece que puede constituirse acueducto para las que « afloren a la superficie naturalmente o por medios mecánicos », sin referirse tampoco a pozos, palabra cuyo uso procura evitarse en el *Proyecto* al extremo que, si no hay deficiencia en la búsqueda, sólo

⁽²⁶⁾ Ob. cit., pág. 584.

⁽²⁷⁾ Ob. cit., pág. 605.

⁽²⁸⁾ Ob. cit., pág. 606.

⁽²⁹⁾ Ob. cit., pág. 607.

⁽³⁰⁾ Ob. cit., pág. 638.

se ha empleado en el art. 1563 ⁽³¹⁾ en concepto que no interesa a nuestro objeto.

En todos estos textos resulta ciertamente difícil descubrir, en forma clara y precisa, los casos en que, a juicio de la Comisión Reformadora, las aguas subterráneas son privadas; y las excepciones a este dominio ⁽³²⁾. Si bien no ha pretendido « que la conceisión fuera su única característica », en cambio, ha querido que « todos sus preceptos trasuntan las ideas fundamentales ». Hay que convenir que en este especial capítulo de las aguas subterráneas ha predominado la conceisión, un tanto exagerada para un problema al que la misma Comisión Reformadora atribuye tan justificada importancia.

Las dificultades que le atribuye y califica de *serias* al extremo de que, a su juicio, « se encuentra justificado » el temperamento que, en definitiva, adopta para desistir del estudio de la solución jurídica que le incumbe, pueden concretarse en breves palabras. Revelan un deficiente asesoramiento técnico, si lo hubo, en cuanto atañe al aspecto físico del aprovechamiento del sistema hidrogeológico de nuestro subsuelo. La gravedad de estas dificultades desaparece, por completo, cuando se llega a comprobar que son absolutamente las mismas que se presentan en el aprovechamiento del hidrológico superficial cuyo conocimiento, en el territorio, es muy poco más satisfactorio que para aquél, no obstante ser visible y más accesible a nuestras actividades habituales. Aquél reclama, simplemente, inversiones equivalentes a las destinadas a éste; es probable que, realizadas simultáneamente las investigaciones que ambos sistemas exigen, a estas horas habríamos comprobado que aquél ofrece, en grandes extensiones del país, indiscutibles ventajas sobre éste para muchos de los aprovechamientos a que destinamos las aguas. La mayor continuidad del derrame y la más habitual constancia del caudal, la menor irregularidad de varias de sus cualidades y las ventajas económicas de su explotación, las hacen preferidas en Europa y en E. U. de N. América para la provisión de muchas de las más grandes ciudades y, con mayor razón, hasta para las más pequeñas aldehuelas. Es tendencia que empieza a despertarse entre nosotros y que, 35 años atrás, fuera ya nuestra preocupación para la ciudad de Tucumán, combatida por la Dirección de las O. Sanitarias de la Nación, como lo fuera la solución adoptada para asegurar la provisión de la ciudad de La Plata con aguas subterráneas.

(31) Ob. cit., pág. 604.

(32) Tomo I, pág. XXXIV.

ROBERTO DE MONTESSUS DE BALLORE

1870-1937

Por C. C. DASSEN



El 26 de enero ppdo ha fallecido súbitamente en París, a los 66 años de edad, víctima de un ataque al corazón, el conocido matemático francés, director del *Index Generalis*, R. de Montessus de Ballore ⁽¹⁾.

(¹) El vizconde Roberto Fernando Bernardo de Montessus de Ballore había nacido en Lyon (Ródano) el 20 de mayo 1870. Era hijo del conde Felipe Jorge de Montessus de Ballore y de Francisca Felicitas de la Fougé, biznieta de Filiberto de Commerson, botánico de la expedición de Bougainville y miembro de la Academia de Ciencias de París. Su tío, Ferdinando de Montessus de Ballore, fué ornitólogo, fundador del Museo de Autun, dentro del cual la ingeniosidad de los coleccionistas acumuló verdaderos tesoros. Uno de sus hermanos, Enrique, profesor de la Facultad de Grenoble, realizó importantes progresos en la industria papelera a raíz de sus estudios sobre la fabricación del papel de *alfa*. Su hermano mayor, el conde Fernando, politécnico y oficial de

Dedicado en un principio a la carrera militar a la que parecía destinado, la abandonó luego. En la Sorbona realizó sus estudios superiores con la dirección de Appell, Picard, Darboux y Poincaré. Se recibió de Doctor en Ciencias, el 8 de mayo de 1905 ⁽¹⁾, ver-
sando sus tesis una, *Sobre las Fracciones continuas algebraicas*; la
otra sobre *Cálculo de las Probabilidades*.

Ejerció las siguientes funciones:

1903-1914. Profesor de Matemáticas generales, primero, de Me-
cánica racional, después, en la Facultad libre de Ciencias de Lila.

Luego, en la Facultad de Ciencias de París, dictó los siguientes
cursos libres:

1915-1916. Sobre las Funciones elípticas (tema elegido por
Appell).

1916-1917. Sobre las Curvas alabeadas algébricas (por pedido de
Darboux).

1917-1918. Sobre los Cuaterniones; sobre las Curvas alabeadas al-
gebraicas.

1918-1919. Sobre algunos puntos de la Teoría de las Curvas al-
gebraicas.

Fué examinador en la Facultad de Ciencias de París entre 1916
y 1919.

Miembro, desde 1917 del Comité de redacción del *Journal de Ma-
thématiques pures et appliquées*.

1923. Profesor (a título de canje) del Gobierno francés, ante las
universidades de los Estados Unidos de América del Norte.

En ese mismo año fué profesor al servicio de los Estudios del
«Office National Météorologique de France».

Desde 1922, actuó en el profesorado en diversas universidades
francesas y otras, a saber:

1922. Lecciones sobre la Teoría de las Curvas Alabeadas Alge-
braicas, en la Universidad de Estrasburgo, invitado por ésta.

artillería, fué jefe de una misión francesa en San Salvador desde 1879 hasta
1885; llamado, en 1907, para dirigir los servicios seismológicos de Chile, fundó
un observatorio de seismología en Santiago, en cuya ciudad falleció, en 1923.

(1) Sus títulos universitarios comportan los siguientes certificados: de Geo-
metría Superior (4 abril 1900); de Cálculo infinitesimal (4 julio 1900); de
Mecánica racional (5 julio 1901). Licenciado en Ciencias (24 octubre 1901).
Doctor en Ciencias matemáticas (doctorado de Estado, 8 mayo 1905). Mención
muy honorable. (Mesa examinadora: Appell, presidente; Poincaré y Goursat,
vocales). Todo esos certificados y títulos fueron otorgados en París.

1925. Lecciones sobre la Estadística teórica, en las universidades de Ginebra, Lausania y Berna, invitado por ellas.

1926-31. Lecciones sobre ese mismo tema en las universidades de Bruselas, Gante, Lieja y Lovaina, por invitación de la Fundación Universitaria de Bélgica; íd. en las de Polonia y Austria-Hungría.

Mereció las siguientes distinciones honoríficas:

Gran Premio, 1906, de Matemáticas, otorgado por la Academia de Ciencias de París (tema: *Sobre las Funciones Continuas Algebraicas*).

Medalla de oro, 1906, otorgada por la Sociedad de Ciencias de Lila.

Gran premio Kuhlman, 1907, de esa misma Sociedad.

La Sociedad Científica de Bruselas, sección de Matemáticas, le eligió varias veces Presidente.

Titular, durante los años 1916 a 1920 de una subvención sobre la Fundación Commeray (Facultad de Ciencias de París).

Medalla de honor, en 1926, de la Universidad de Bruselas.

Damos, a continuación, una bibliografía de sus principales publicaciones, tal cual el mismo R. de Montessus de Ballore la publicó en el mes de febrero de 1926; conservamos la numeración por él dada; y completamos la noticia siguiendo la numeración consecutiva, con los trabajos publicados ulteriormente.

Acta Mathematica

1. Les Fractions Continues Algébriques, t. XXXII, 1909. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*.
2. Sur les Fractions Continues Algébriques, t. XXV, 1908. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*.
3. Equations Algébriques, Développement périodique des Racines, t. XXI, 2ª parte, 1897.
4. Sur la Convergence de certaines Fractions Continues Algébriques, t. XXVII, 1ª parte, 1903.
5. Les Principes de la Statique, t. XXXII, 2ª y 3, parte, 1908.
6. Méthode Générale de Détermination des Racines des Equations numériques, t. XXXIII, 1909.
7. Détermination du Centre de gravité de l'aire d'un demi-ellipsoïde (à trois axes inégaux), t. XXXVIII, 1913.
8. Les fondements du Calcul des probabilités, t. XLIII, 1ª p., 1923.
9. Sur le parallélogramme des forces, *ibid.*
10. La Probabilité renforcée, *ibid.*
11. La formule fondamentale de la Théorie des Erreurs, t. XLIV, 2ª p., 1924-1925.

12. Sur la représentation des Erreurs, *ibid.*, *documents et comptes rendus*, 1^{er} p., 1924-1925.
13. Probabilité et Statistique. Méthodes nouvelles. Application aux accidents du travail, t. XLV, 1^{er} p., 1926.
14. Calcul des probabilités et statistiques; nouveaux principes, t. XLVI, *Volumen jubilario*, 1926.
15. Probabilités et Statistique. La hauteur barométrique à Southampton, t. XLV, 2^e p., 1926.
16. Solution du Problème fondamental de la Statistique, t. XLV, 2^e pá., 1926.

Bulletin de la Société Mathématique de France

17. Sur les Fractions Continues Algébriques, t. XXX, 1902.
18. La Résolution numérique des Equations par la Méthode de Wronski, t. XXXIII, 1905.
19. Recherche effective des Racines réelles des Séries Hypergéométriques, t. XXXVII, 1909.

Bulletin des Sciences Mathématiques

20. Les Biquadratiques Gauches, t. XLIV, 1920.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences

21. Sur les Fractions Continues Algébriques, t. CXXXIV, 23 junio 1902.
22. Sur la Représentation des Fonctions par des Suites de Fractions rationnelles, t. CXXXVII, 22 febrero 1904.
23. Sur les Fractions Continues Algébriques, t. CXXXIX, 21 nov. 1904.
24. Sur les Fractions Continues Algébriques de Laguerre, t. CXL, 29 mayo 1904.
25. La Recherche des Racines de certaines Equations numériques, t. CXLVIII, 22 febrero 1909.
26. Sur le Calcul des Racines des Equations numériques, t. CXLVIII, 28 junio 1909.
- 27-28. Sur les Courbes Gauches Algébriques, t. CLXIV, 5 y 12 de marzo 1917.
- 29-30. Sur les Courbes Gauches de première espèce, t. CLXVI, 4 y 25 febrero 1918.
31. Sur les Courbes Algébriques planes ayant des points multiples communs, t. CLXVII, 19 agosto 1918.
32. Sur la prévision locale du Temps, t. CLXXVI, 4 junio 1923.
33. Sur la prévision méthodique du Temps, t. CLXXVI, 25 junio 1923.
34. Sur les courbes de Gauss dissymétriques, t. CLXXVIII, 16 junio 1924.
35. Sur l'évaluation de $\log n!$, t. CLXXIX, 3 nov. 1924.

Comptes rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences

36. La probabilité dans les sciences d'observation, 1923.
37. Corrélation et moindres carrés, 1925.
38. La probabilité des causes dans les phénomènes physiques, 1925.

Comptes rendus du deuxième Congrès international de Philosophie

39. Une Définition logique du Hasard et de la Probabilité, Ginebra, 1904.

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

40. Sur les Courbes Gauches Algébriques, 7^e serie, T. II, 1916.
 41. Sur les Cuartiques Gauches de Première Espèce, leurs représentations paramétriques, leur classification, 7^e serie, T. III, 1917.

L'Enseignement Mathématique

42. Les Fondements de l'Arithmétique Moderne, t. I, 1899.
 42. Peut-on vulgariser les Mathématiques Supérieures?, t. III, 1901.
 44. La loi des Grands Nombres, t. VII, 1905.

La Revue du Mois

45. A propos du Hasard, 2^o año, 1907.

Mémorial de l'Office National Météorologique

- 45 (bis) Les Courbes de Gauss dissymétriques, 1924.
 46. Tables à 12 décimales de $\log n!$ pour les valeurs entières de n , de 1 a 1000, en collaboration avec F. J. Duarte, 1925.
 47. La Méthode de Corrélation, 1926.

Nouvelles annales de Mathématiques

48. Un paradoxe du Calcul des Probabilités, 4^a serie, t. III, 1903.
 49. De l'usage pratique du Théorème de Sturm, 4^a serie, t. X, 1909.

Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo

50. Sur les Fractions continues Algébriques, t. XIX.

Rueve Générale des Sciences pures et appliquées

51. La Balistique du fusil de chasse, 1914.
 52. La Méthode de Corrélation, 1926.

Revue de Lille

53. Définition Logique du Hasard, t. XVII, 1905.

Varios

54. La Balistique du fusil de chasse. *Revue des Questions Scientifiques de Bruxelles*, 1914.

55. Las Matemáticas en Francia en los últimos cincuenta años, *Ibérica*, 1924.
56. Sur la non-corrélation en France entre la pluie et les récoltes, *La Météorologie*, 1926.

Obras diversas

57. Leçons Élémentaires sur le Calcul des Probabilités; gr. in 8°, VI + 191 páginas. Gauthier-Villars, París 1908.
58. Additions à: *Histoire des Mathématiques* por W. W. Rouse Ball, traducción de L. Freund, seguidas de una nota de G. Darboux; 1 vol. gr. in 8°, 271 páginas. Hermann, París. 1907 y 1912.
59. Exercices et Leçons de Mécanique Analytique; in 8°, II, 334 p. Gauthier-Villars, París, 1915.
60. Leçons sur les Fonctions Elliptiques en vue de leurs Applications. Curso libre dictado en la Facultad de Ciencias de París, gr. in 8°, X — 267 p., *ibid.*, 1917.
61. Introduction à la Théorie des Courbes Gauches Algébriques. Curso libre dictado en la Facultad de Ciencias de París, recogidas y redactadas por M. Vogt, licenciado en ciencias; in 4°, autografiado, 112 p. París, 1918.
62. Calcul des Probabilités et Statistiques. Tableaux. (Lecciones dadas en las Universidades de Ginebra, Lausania, Berna, Lovaina, Gante, Bruselas y Lieja, premiadas con una medalla de honor de la Universidad de Bruselas. Chiron, 1926, 1ª y 2ª ed.

Annales de la Société Scientifique de Bruxelles

63. La Formule fondamentale de la Statistique, 1927.
64. Le rôle des constantes de la formule fondamentale de la Statistique et leur relativité, t. XLVII, serie A, 1ª parte, 1927.
65. Détermination de la Mode ou écart le plus probable dans les courbes de probabilité simple (en colaboración con F. J. Duarte), t. XLVIII, serie A, 1ª p., 1928.
66. Quelques statistiques réductibles et non réductibles à la loi de probabilité simple. Conclusión, t. XLVIII, 2ª parte, 1928.
67. Remarque sur quelques formules de la théorie des fréquences, t. XLIX, 1ª parte, 1929.
68. La fonction θ dans le calcul des probabilités et l'écart probable, t. XLIX, 2ª parte, 1929.
69. Probabilités et statistiques. Le problème du second degré, t. L, 1ª parte, 1930.
70. Statistique mathématique. Problèmes de degrés supérieures, t. LII, 1ª parte, 1932.
71. Statistique mathématique. Les moments partiels du second ordre de la fonction binomiale, t. LII, 2ª parte, 1932.
72. Jeu de la roulette. Étude expérimentale d'écarts probables, t. LIII, 1ª parte, 1933.
73. Détermination des écarts probables dans la fonction binomiales, t. LIV, 1934.

L'Enseignement Mathématique

74. Statistiques et probabilités, n° 1, 2, 3, 1928.

Revue Scientifique

75. Statistique mathématique, n° 4, 27 febrero 1932.
 76. La Moyenne, n° 17, 8 septiembre 1934.
 77. Wronski mathématicien, n° 10, 25 mayo 1935.

Revue Générale des Sciences

78. Les Phénomènes et la Loi de Probabilité simple, n° 10, 1ª parte, 31 mayo 1928.
 79. Les Phénomènes et la Loi de Probabilité simple, n° 11, 2ª parte, 15 junio 1928.
 80. Quelques particularités des séries de Fourier, n° 13, 15 julio 1931.

Revista Matemática Hispano-Americana

81. Principios de Estadística Matemática, 8 septiembre 1929.

Obras varias

82. Notions sur la théorie des quaternions. Curso libre dictado en la Facultad de Ciencias de París. Gauthier-Villars, 1930.
 83. Probabilités et Statistiques. Hermann, 1931, in 4º, 210 páginas.
 84. La Méthode de Corrélacion, suivie de la table des carrés des nombres entiers de 1 a 1000, (Colección « Scientia »). Gauthier-Villars, 1932.
 85. Statistique Mathématique. Aus den Monatsheften für Mathematik und Physik, XXXIX, Band 1 Heft, Leipzig 1932. Akademische Verlagsgesellschaft, m. b. H. Conferencias dictadas en las Universidades de Viena, Budapest y Polonia, mayo 1931.

De esta bibliografía se desprende que los campos matemáticos especialmente cultivados por R. de Montessus son los de las curvas algebraicas, y el cálculo de las probabilidades. Incidentalmente se ocupó también del álgebra, de la teoría de las funciones y de la filosofía de las ciencias.

No vamos, naturalmente, a examinar toda esa obra, pero podemos hacer algunas ligeras indicaciones sobre la misma.

En Algebra, ha indicado un método que permite simplificar los cálculos requeridos para la aplicación del método de Sturm a la resolución de las ecuaciones numéricas (trabajo n° 49); ha demostrado que ese teorema es prácticamente aplicable a las ecua-

ciones que se forman igualando a cero las series hipergeométricas $F(a, b, c, -x) = 0$ cualesquiera sean las cantidades reales a, b, c (nº 10). Ha dado un procedimiento de cálculo, derivado del método de las sucesivas aproximaciones, que permite determinar con toda la precisión deseable, las raíces reales de las ecuaciones numéricas (nº 3, 6, 25).

En otro trabajo (nº 18) expuso el método de resolución de las ecuaciones numéricas deduciéndolo de los trabajos recientes (como los de Hadamard, *La Serie de Taylor*, etc.); y así puso en evidencia que, hace cerca de un siglo ya, Wronski había indicado procedimientos de resolución numérica de ecuaciones algebraicas idénticos a los más modernos de ahora.

En los trabajos nº 7 y 60 (pág. 18), ha mostrado que las coordenadas del Centro de gravedad del área de un semielipsoide escaado pueden ser expresadas con el auxilio de integrales elípticas. Las coordenadas de un punto de una bicuadrática alabeada, intersección de dos superficies de segundo orden, pueden siempre ser representadas por funciones elípticas de mismo argumento; en sus trabajos nº 20 (pág. 8), 61 (pág.) 72 y 41, Montessus, en pocas líneas, ha probado la verdad de esa proposición. Se ha también esforzado en presentar la teoría de las funciones elípticas en forma elemental (trabajo nº 60).

La representación de las funciones por medio de fracciones continuas sienta tres problemas asaz difíciles: 1º determinar las reducidas; 2º hallar la zona de convergencia de la serie de las reducidas, y 3º probar que esa serie representa realmente la función.

Montessus, en sus trabajos nº 1, 2, 4, 17, 21, 22, 23, 24, 50, ha aportado una importante contribución a tal estudio de las fracciones continuas algebraicas, sacando interesantes conclusiones, entre otras, que la convergencia de ciertas funciones continuas tiene lugar en todo el plano de la variable, de suerte que la prolongación de la fracción continua no es detenida por puntos singulares, ya sean puntos críticos algébricos o logarítmicos. Ha establecido una teoría general de convergencia.

En lo relativo a las singularidades de las curvas alabeadas algebraicas (Nos. 27 y 40), llegó a la conclusión de que es siempre posible precisar la naturaleza de los puntos que una curva alabeada tiene en una paralela al eje de las z trazada por cierto punto singular.

Esas mismas curvas alabeadas algebraicas (y especialmente las bicuadráticas alabeadas), que son materias de los trabajos Nos. 28, 40, 20, 29, 30, 41, 61; le han dado motivo a interesantes estudios.

Lo mismo diremos de lo relativo a las curvas algebraicas planas que tienen puntos múltiples comunes (nº 31).

Sus trabajos sobre el Cálculo de Probabilidades (Nos. 44, 48, 57) y sobre *Estadística Teórica* (Nos. 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 46, 47, 52, 56, 57, 58) son especialmente importantes.

Y no pueden tampoco pasar desapercibidas sus contribuciones a la Filosofía de las Ciencias (Nos. 5, 39, 42, 43, 44, 45, 53, 57).

En el Cálculo de las Probabilidades podemos especialmente señalar las definiciones que ha dado y la manera como ha planteado el problema a fin de escapar a paradojas (como la llamada *de Bertrand*). Montessus se ha propuesto exponer el Cálculo en cuestión en base a la ley de Bernouilli encarada como un principio experimental (nº 57, pág. 16). Respecto de la Estadística Teórica, como las necesidades de la misma requieren, desde luego, el llamado *Método de Correlación* utilizado cuando solo se dispone de muy pocas (algunas decenas) observaciones, Montessus ha justificado ese Método, hasta entonces solo de carácter empírico, del punto de vista matemático (Nos. 47, 52, 56, 60). Además, la Estadística Teórica necesita también el uso de ciertas combinaciones de probabilidades elementales. Montessus ha establecido con éstas la noción de *Probabilidad reforzada* (Nos. 19, 59, 61). Finalmente, toda vez que esa misma Estadística Teórica requiere el estudio profundizado de cierta fórmula, Montessus se ha especializado en ese estudio, consiguiendo muy interesantes conclusiones (Nos. 20, 22, 23, 24, 25, 26).

Ha dado una nueva definición del *azar* la que fué adoptada por el Congreso Internacional de Filosofía de Ginebra en 1904 (Nos. 39, 45, 53, 57).

Ha creído deber hacer un distingo neto entre la fuerza estática y la dinámica (nº 5). En su trabajo nº 43, vertido al castellano y publicado por la *Revista Hispano Americana* (t. I, p. 81, 1919) ha realizado una interesante obra de divulgación poniendo al alcance de los profanos cuestiones difíciles relativas a las superficies mínimas que Plateau ha realizado prácticamente con marcos de alambres y burbujas de jabón.

Completaremos estas breves indicaciones con el recuerdo de uno que otro juicio que han merecido algunos de sus libros tanto respecto de su contenido científico como de su valor didáctico.

El profesor Ugo Broggi de Roma al comentar las *Lecciones elementales sobre el cálculo de las Probabilidades*, dice: « Sabiamente curioso de las materias que expone, Montessus introduce en su exposición observaciones personales dándole así el carácter de cosa

vivida. Por eso y por la más amplia consideración de las aplicaciones posibles, es que consigue evitar la fatiga y el hastío que, de otra manera, podría producirse en un lector no familiarizado en la materia (*L'enseignement Mathématique*; año 1908; pág. 633).

Respecto del libro *Exercices et Leçons de Mécanique Analytique*, el profesor A. Buhl de Toulouse dice: « Montessus tiene en grado superlativo la preocupación de lo acabado analítico, de la solución completamente terminada. No se trata aquí sólo de una colección de ejercicios sino que, en rigor, puede aprenderse en este libro la Mecánica analítica ella misma » (*ibíd.*, 1916, pág. 140). Su *Leçons sur les Fonctions elliptiques en vue de leurs applications*, ha sido comentado por el mismo Buhl así: « Puede decirse de un modo general que esas Lecciones representan una tentativa feliz de construcción de las funciones elípticas basada especialmente en el empleo del cálculo algebraico » (*ibíd.*, 1917, pág. 205). Y respecto de su *Introducción a la Teoría de las Curvas alabeadas*, agrega Buhl: « Casi estupor causa recorrer esas interesantes páginas. ¿Cómo así? ¿Tantas cosas curiosas existían en la intersección de dos cuádricas respecto de las que nada nos decían los tratados tan extensos, sin embargo que sobre dichas cuádricas aisladamente discurrían? La laguna era en verdad lamentable. Hay en estas *Lecciones* exposiciones muy originales y novedosas » (*ibíd.*, 1918, pág. 396).

En el librito *La Méthode de Corrélation* (Colección « Scientia »), Montessus, llamado a enseñar ese Método en la Oficina Nacional Meteorológica de París, ha conseguido establecerlo sobre bases sólidas vinculándolo con el método de los cuadrados mínimos. Cuando publicó ese librito, el método era muy empleado por los estadísticos ingleses, americanos del Norte y alemanes; pero muy poco por los franceses; y, así, el autor llenó, para estos últimos, una laguna existente.

Cuando solo se dispone de pocas observaciones, no es posible aplicarles el método de las probabilidades, pero puede entonces aplicárseles el de *Correlación*, el cual indica, sobre todo, si una dependencia recíproca que parece resultar de esas pocas observaciones, debe o no ser aceptada y llevarse adelante.

Y respecto de su último libro *Probabilités et Statistiques* que contiene las lecciones dadas por Montessus en la citada Oficina Nacional Meteorológica de Francia, Buhl, que lo ha también analizado, reconoce (*L'Enseignement Mathématique*, 1931, pág. 160) que presenta un elevado carácter de originalidad, hecho que también señala el profesor Alliaume de la Universidad de Lovaina. Dice aquél,

entre otras cosas, que los métodos originales del autor permiten tratar muchas cuestiones de la estadística, mejor que por el de la continuidad integral; y que, el Cálculo de Probabilidades, gracias a aquél, ha dado en sus relaciones con la estadística un positivo paso adelante.

Además de sus trabajos científicos, Montessus de Ballore publicaba, desde 1918, un anuario general de las Universidades titulado *Index Generalis*, destinado a reemplazar el que los alemanes publicaron hasta la Guerra (1914) con el nombre de *Minerva*. Al emprender esta publicación se impuso Montessus una labor considerable, pero la ha afrontado con éxito.

Desde el año 1919, el *Index* viene saliendo año tras año. Montessus, antes de fallecer, pudo ver publicado el tomo relativo al año en curso 1937, cuya primera parte (1900 páginas, más o menos) concierne las Universidades y Escuelas Superiores del mundo entero, con la indicación de los cursos dictados, los nombres de los profesores y demás detalles. La segunda parte se refiere a los Observatorios, Bibliotecas, Institutos Científicos, grandes Academias, Sociedades Sabias de los diversos países civilizados. Contiene también muchas otras informaciones, así como tablas completas, entre otras, la Tabla alfabética de las personalidades científicas y literarias (95 000 referencias). Esta última edición contiene también una lista de canjes, otra de los principales editores, otra de los premios Nobel, etc., etc. Comporta 2500 páginas y hay un edición francesa y otra inglesa. Por lo demás está redactado en siete idiomas.

El autor de la presente noticia tuvo ocasión de prestar una pequeña ayuda al Dr. Montessus en lo relativo a la República Argentina y de allí que haya podido conseguir ahora muchos de los datos que damos, facilitados por su señorita hija y reemplazante en la Dirección del referido « Index ».

El retrato que acompaña la presente noticia nos ha sido facilitado también por ella con la indicación de que no se ha podido disponer de otra mejor por no existir; nos previene con tal motivo que su señor padre no tenía ordinariamente el aire severo que parece desprenderse de la foto en cuestión.

BIBLIOGRAFIA

Por E. R.

LEDoux, EDouARD, *Séchage des produits hygroscopiques. Adsorption de la vapeur d'eau*. Un vol. de 93 págs. con 51 figuras (16 × 25). Precio, 32 francos. Editado por la « Librairie Polytechnique ». Ch. Béranger, París, 1937.

El libro que nos ocupa se inicia con un Prefacio del famoso físico francés Georges Claude, en el cual se hace una ligera reseña de los adelantos sucesivos que ha experimentado en los últimos años el estudio de las fuerzas capilares, que pequeñas y despreciables, en apariencia, son susceptibles, sin embargo, de manifestarse produciendo grandes efectos. La fuerza de tracción, por *unidad de sección* de los meniscos que se forman en los canales extremadamente finos, es enorme, y, en algunos casos de adsorción, es ella la que obra para extraer las moléculas de vapor contenidas en la atmósfera circundante, haciéndolas pasar así, a través del menisco, de la atmósfera al líquido. Estos efectos, últimamente comprobados, son tan potentes que gracias a ellos se ha logrado reducir en proporciones asombrosas la tensión de los vapores, originándose fenómenos de liquefacción en circunstancias que antes se juzgaban imposibles.

Todo un nuevo campo de investigaciones se ha presentado así a los estudiosos, y muchas aplicaciones prácticas se llevaron ya a feliz éxito; una de ellas en la construcción de máscaras protectoras contra los gases, donde una materia porosa, generalmente carbón, baja tan eficientemente la tensión de los gases que el aire llega a los pulmones con carácter casi inofensivo. Otra consiste en el empleo del carbón enfriado a la temperatura del aire líquido, para separar unos de otros los llamados *gases raros* del aire (neon, helio, Krypton y xenon).

En la fabricación de lámparas tubulares de incandescencia, llenadas de gases raros, se han utilizado también estos procesos de adsorción: y más últimamente, sustituyendo al carbón con sales de silicio y aluminio se han logrado interesantes resultados en la desecación de los gases.

Toda una técnica especial ha nacido, en consecuencia, y en ella se considera a M. E. Ledoux como uno de los ingenieros más competentes. Sus obras anteriores, sobre *La dessiccation industrielle des gaz comprimés* y acerca de *La ventilation et l'assèchement des locaux souterrains*, han contribuido a la fama bien cimentada de que hoy goza como profundo conocedor de la teoría y de la práctica atingente a este novísimo capítulo de la Física.

En su reciente libro, trata principalmente de los productos higroscópicos, dando las bases de su empleo racional en la industria, dejando de lado los problemas de la adsorción dinámica adiabática, aunque este punto sea de extremado interés para la desecación económica del aire. Más bien, el autor se ha limitado a exponer los cálculos relativos al aire de ventilación de los secaderos, y al estudio de la evaporación, dejando de lado los tópicos ya vulgarizados o que pueden encontrarse en otras obras. Por eso, su libro es de reducido número de páginas, pero de extraordinario valor, pues en todas ellas se estudian tópicos nuevos y susceptibles de recibir aplicaciones inmediatas.

El lector puede juzgar, por el siguiente detalle de los temas tratados:

Primera parte: Adsorción y desadsorción estáticas isotérmicas. Cap. I: Definiciones. Cap. II: Tubos capilares; Tensiones superficiales; Calor de adsorción, etc. Cap. III: Materias adsorbentes e higroscópicas; Productos porosos; Isósteros; Curvas de humedad relativa, etc. Cap. IV: Isotermas; Estudio experimental; Histéresis; Tiempo necesario para alcanzar el equilibrio, etc. Cap. V: Aplicación industrial de la adsorción estática. Cap. VI: Adsorción capilar; Punto crítico; Tensión superficial del agua adsorbida.

Segunda parte: Adsorción y desadsorción dinámica isotérmica. Cap. I: Rapidez de la adsorción; Eficacia de la sequedad del aire, etc. Cap. II: Métodos de ensayo; Punto de fatiga; Causas; Humidificación isotérmica de los productos higroscópicos, etc. Cap. III: Eficacia de la humidificación del aire: expresión de la eficacia global, etc.

Tercera parte: Secado de los productos higroscópicos. Cap. I: Abaco de la desadsorción: Curvas de saturación; Pérdidas de calor; Ejemplos. Cap. II: Secado intermitente; Secado adiabático; Progresión del secado. Cap. III: Secado metódico: comparación entre los dos sistemas.

TIMOSHENKO, S., *Theorie de l'élasticité*. Un volumen de 446 págs. con 203 figuras. Precio, 130 francos. Editado por la « Librairie Polytechnique », Ch. Béranger. París, 1936.

El nombre de Timoshenko, profesor de Mecánica aplicada en la Universidad de Michigan, no es desconocido de los lectores franceses. En 1913, los *Annales des Ponts et Chaussées* habían publicado ya sus trabajos sobre « Estabilidad de los sistemas elásticos », traducidos por Heroufousse y Karpinski; y en 1922, se editó en París un folleto que trataba del « Cálculo de los arcos elásticos », original de Timoshenko. Pero la mayoría de las estudios debidos al ilustre profesor de la Escuela Politécnica de Kiew, seguían en ruso o en alemán. Sólo después de su reciente incorporación a la Universidad estadounidense de Michigan, aparecieron algunos en inglés, empezando por la *Applied Elasticity* (1928). Una de sus más recientes obras es la *Theory of Elasticity* (1934) que ahora podemos leer en francés, traducida por A. de Riva Berni, ingeniero de Artes y oficios y prologada por R. Campus, Director del Laboratorio de Ensayos de Ingeniería Civil de la Universidad de Lieja.

Se trata de una gran obra de un gran autor. « Mi deseo de promover la traducción de las obras de Timoshenko —dice Campus— procede de la originalidad que les encuentro y que debe ser particularmente sensible a los

espíritus nutridos del elasicismo científico francés. Su exposición de temas, e, intuitiva y concreta, procede luego de lo particular a lo general, de lo simple a lo complejo, siguiendo una progresión rápida, a veces abrupta, pero siempre adecuada al fin propuesto, para hacer comprender y volver fácilmente accesibles a los ingenieros los más complicados problemas de la elasticidad y de la resistencia de materiales. Timoshenko busca afanosamente ser comprendido, pero sin eludir la exposición de ninguna dificultad: se lo puede considerar como un matemático entre los ingenieros y como un ingeniero entre los matemáticos ».

Los doce capítulos que integran la obra tienen los siguientes títulos:

Cap. I. Tensión y deformación en un medio de dos dimensiones. Cap. II. Problemas de dos dimensiones en coordenadas rectangulares. Cap. III. Problemas de dos dimensiones en coordenadas polares. Cap. IV. Métodos basados sobre la energía de deformación. Cap. V. Resolución de los problemas a dos dimensiones por medio de la variable compleja. Cap. VI. Estudio de las tensiones y de las deformaciones a tres dimensiones. Cap. VII. Teoremas generales: ecuaciones diferenciales del equilibrio, etc. Cap. VIII. Problemas elementales de elasticidad a tres dimensiones. Cap. IX. Torsión: barras prismáticas, elípticas, perfiles laminados, tubos huecos, etc. Cap. X. Flexión de una barra prismática. Cap. XI. Tensiones distribuídas simétricamente con respecto al eje de un sólido de revolución. Cap. XII. La propagación de las vibraciones en los medios elásticos sólidos.

Por la lista de los temas tratados y por los antecedentes del autor, puede juzgarse del alto mérito del libro que la casa Béranger ha editado con el cuidado tipográfico y la perfección que le es característica.



EDUARDO L. HOLMBERG

H O L M B E R G

† el 5 - XI - 1937

La muerte del Dr. Eduardo L. Holmberg, acaecida en Buenos Aires durante la noche del 4 al 5 de Noviembre de 1937, marca una fecha luctuosa para la ciencia argentina. Con él desaparece uno de los grandes, de los más grandes cultores que ha tenido entre nosotros el estudio de la Naturaleza.

Aunque extinguida su laboriosa vida a la avanzada edad de 85 años, largo tiempo después de abandonadas las actividades de investigador con las cuales conquistó la justa fama que aureola su nombre, no es menos sensible su pérdida, pues Holmberg era un ejemplo constante de sencillez y armonía, a la vez que su palabra continuaba siendo pródiga, hasta los últimos momentos de su existencia, en difundir verdades y enseñanzas, perennemente salpicadas de esas finas ironías y sutiles comentarios, posibles sólo a quienes tienen la extraordinaria cultura de Holmberg, y que marcaron uno de los más característicos aspectos de esta figura extraordinaria.

Sus primeras publicaciones se refieren a *Viajes por la Patagonia*, y datan de 1872. Holmberg era entonces un joven estudiante de 20 años, y la Patagonia una comarca desconocida, inhóspita y dominada aún por tribus salvajes. El simple hecho de emprender semejantes correrías, indica ya bien a las claras cuál era su vocación, que lo llevó a estudiar la flora del Río Negro, trayendo a su regreso interesantes colecciones que donó al Museo Nacional de Buenos Aires. En 1874 empiezan a aparecer trabajos suyos sobre los *Arácnidos* en los *Anales de Agricultura de la República Argentina*, y en el *Periódico Zoológico*, que junto con *El Naturalista Argentino*, fundado en 1874 por Enrique Lynch Arribalzaga, eran las publicaciones científicas de mayor importancia en aquella época. Las investigaciones de Holmberg sobre las arañas, fueron proseguidas sistemáticamente durante los años 1876 a 1879, originando numerosos artículos en los que describe y clasifica varias especies nuevas, estudiando también los perjuicios causados por algunas de ellas a

la agricultura. En 1877 hizo un viaje a las provincias del Norte, cuya reseña publicó en el *Boletín del Consejo de Educación*; y con las observaciones directas recogidas escribió en 1878 *Mamíferos y Aves de Salta*, monografía a la que siguieron otras: *Sobre las Aves de la Provincia de Buenos Aires*; — «*Rhea albescens*», Lynch y Holmberg; *Sobre los Solpúgidos argentinos*, y otros trabajos menores en *El Naturalista Argentino*, donde también se encuentran detallados sus viajes por la cuenca del río Luján y norte de la Provincia de Buenos Aires. En 1879 empezó su colaboración en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, con una nota *Sobre las especies del género Bombur*, halladas hasta la fecha en el país.

Al margen de esta copiosa producción de alta seriedad científica, Holmberg cultivaba la literatura con parecido éxito. En 1874 apareció en el folletín de *El Argentino*, su traducción de los regocijantes *Documentos del Club Pick-Wick*, de Dickens, autor por el que sentía especial predilección. En 1876 tradujo gran parte del libro de Ricardo Napp sobre *La República Argentina*. Una revista literaria, *La Ondina del Plata*, incluye en sus entregas de 1876, los ensayos *Insomnio* y *El Ruiseñor y el Artista*; el mismo año aparece en un volumen de 190 páginas el *Viaje maravilloso del señor Nic-Nac al planeta Marte*, antes incluido como folletín en *El Nacional*, y en la *Revista Literaria* dió a conocer el cuento *La pipa de Hoffmann*; en 1878, *El Album del Hogar* publica en folletín su novela corta *El tipo más original*, y en 1879 los folletines de *La Nación* incluyen tres trabajos literarios de Holmberg: *Boceto de un alma en pena*; *Umbra*, y *Olga*.

Todos estos escritos son anteriores a su graduación de médico en 1880 con una tesis sobre *El fosfeno*; y si los hemos detallado especialmente, es porque todo lo que de más característico iba a mostrar después la vida de Holmberg, se revela ya en estas primeras actividades de su juventud: el afán de estudiar directamente la naturaleza; la versatilidad de su espíritu curioso; la fantasía de los temas elegidos para sus ensayos literarios; y el arte e ironía supremas de que fueron siempre revestidas sus palabras. En cambio no se encuentran después rastros de sus estudios médicos, salvo un artículo sobre *Osteomalacia*, aparecido en 1893 en *Revista del Jardín Zoológico*.

Nunca quiso ejercer la profesión para la cual le habilitaba su título universitario, pues, según decía, le repugnaba ganar dinero sobre el dolor ajeno. «No me es posible aceptar — añadía — nada que venga de los sufrientes. Sería, en cambio, un gran médico de

las personas sanas y felices ». Sin embargo, alguna actividad médica tuvo que cumplir en los primeros tiempos de su doctorado, obedeciendo a sugerencias paternas, y de esa época data un anecdotario pintoresco y excepcional propio del incorregible carácter burlón de Holmberg. Algunas recetas, hechas a su « modo y manera », pronto se hicieron famosas.

En las dos décadas siguientes, 1880-1900, se desarrolla la amplísima obra de naturalista llevada a cabo por Holmberg. Aun la simple enumeración de sus obras sería ya fatigosa. Efectuó viajes a las Sierras del Tandil (1883); al Chaco (1885); a Misiones (1897); a Mendoza (1897), publicando extensas reseñas de todos ellos; colabora en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*; en el *Boletín de la Academia de Ciencias de Córdoba*; en la *Revista de la Sociedad Geográfica Argentina*; en la *Revista de Historia Natural* de Ameghino; en congresos científicos, en los censos nacionales y provinciales, etc.; aborda innúmeros tópicos de mineralogía (en 1886 tradujo la obra de J. H. Collins, adaptándola al país); de botánica (en 1892 publicó la *Clave analítica de las familias de las plantas*; en 1897 la *Flora Argentina*); de zoología, acerca de la cual Holmberg escribió más de cincuenta monografías, algunas de tanto valor como el *Catálogo de los peces argentinos* (1893); de arqueología, etc. Dió conferencias tan interesantes como *Las arañas* (1881); *Darwin* (1882); *Camalotes* (1887); *Los peces* (1889); *Ciencia y Poesía* (1890); *El fuego y los volcanes* (1894); *El Iguazú* (1900), enalteciendo así con sus palabras las más prestigiosas tribunas del país. A partir de 1900 sus monografías se incluyen en los *Anales del Museo Nacional*, y en *Apuntes de Historia Natural*, de los que aparecieron varios volúmenes en colaboración con otros naturalistas. En 1908 publicó su *Botánica elemental* en un volumen de casi 500 páginas.

Desde 1888 hasta 1904, ocupó la dirección del Jardín Zoológico de Buenos Aires, realizando allí la gran obra que hizo de Holmberg el naturalista más popular del país. Enriquecidas las colecciones y dispuestas en forma apropiada para su cómodo examen, supo atraer la atención y la curiosidad de grandes y chicos, que hallaron en sus visitas domingueras al Jardín Zoológico constantes motivos de agradable enseñanza. Al pie de las jaulas o por los senderos del jardín, encontraban a un hombre de apariencia hosca y de maneras bruscas pero de bondad escondida y sabiduría inagotable, que, mezclándose con ellos, les explicaba en pintorescas charlas las más curiosas costumbres, descripciones y antecedentes de las faunas sal-

vajes. Era Holmberg, que así contribuía, silencioso y perseverante, a la mayor ilustración de la masa ciudadana. Publicó varias guías ilustradas, catálogos y planos del Jardín, además de la *Revista del Jardín Zoológico*, en la que incluyó muchos escritos de alto valor científico. Su gestión terminó ruidosamente, pues las autoridades municipales de las que dependía el Jardín Zoológico nombraron una « Comisión asesora del Director », en completo desacuerdo con él, obligándolo a renunciar. Se dice que hubo de por medio ciertas dificultades puestas por Holmberg a permitir manejos electorales con los peones del Jardín, pero es más probable la existencia de algún incumplimiento a las solemnes formalidades burocráticas, de las que siempre se burló Holmberg.

Quedan sin mencionar en esta rápida nota, muchos otros de sus trabajos, como sus novelas, en gran parte de asuntos fantásticos, *La casa endiablada*, *La bolsa de huesos*, *El medallón*, etc.; artículos de crítica; traducciones de Wells; estudios de arte, como los dedicados a la restauración de la Venus de Milo; su gran poema *Lin-Calel*, de más de 7000 versos endecasílabos, etc.

Y su acción docente, que ha dejado huellas inmensas en las generaciones de estudiantes a los que aleccionó en Colegios Nacionales, Escuelas Normales y Universidades; y más todavía, sus inimitables conversaciones en rueda de amigos. Reunido con Payró, Rubén Darío, el astrónomo Harparath, Gutiérrez, el médico-poeta, y otros espíritus de excepción, ante los cuales brillaba la sorprendente cultura de Holmberg, hablaba de literatura germánica, de las religiones de la India o de etimologías griegas y latinas, mezclándolas a desconcertantes paradojas y a inverosímiles citas que arrancaba de los más escondidos vericuetos de su pasmosa erudición.

En las páginas iniciales de *Darwiniana*, el Dr. Hieckens, refiriéndose a Holmberg, trató de caracterizarlo, diciendo: « En sus ideas y pensamientos, es vasto y profundo como el mar; violento como el pampero en la defensa de su honor y cálido como el sol en sus amistosos afectos. Holmberg levanta bajo el palio de la Naturaleza, su cátedra que brilla con el oro de su sabiduría y resuena con el acento argentino de su elocuencia ».

Y Rubén Darío, al final de una de las tantas agradabilísimas reuniones celebradas en la vieja casona de la calle Cerrito, al despedirse le dirigió a Holmberg una frase, como suya: « Cuando mueras, que sobre tu sepulcro no se derrame el llanto, sino rocío, vino, miel... ».

**Discurso del señor Presidente de la Academia
de Ciencias E. F. y N. Ing. AGUSTIN MERCAU**

En nombre de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de la Sociedad Científica Argentina, y con la más honda emoción personal, expreso el profundo sentimiento que ha producido en el seno de ambas instituciones la muerte del gran sabio argentino Eduardo Ladislao Holmberg.

Su desaparición representa una inmensa pérdida para el país y para la ciencia en general.

Holmberg era un hombre dotado de un talento verdaderamente extraordinario, y de una aptitud de trabajo excepcional. No ha habido género de actividad en que no se haya destacado. Ya sea en la medicina, en la física, en la mineralogía, en la geología, en la botánica, en la zoología, en la arqueología, en la literatura, en el periodismo, en la poesía, en las artes, etc. Formó parte, además de numerosas instituciones, entre otras la Sociedad Científica Argentina, de la que fué socio casi desde su fundación, y la cual le designó más tarde como socio honorario.

Holmberg fué durante largos años miembro de nuestra Academia y desempeñó por varios períodos su presidencia. A la autoridad de su palabra se agregaban condiciones especialísimas de sociabilidad y amenidad que le granjeaban la más viva y sincera simpatía de todos sus colegas. Al cumplir la ya avanzada edad de 75 años, ante su propósito de abandonar sus tareas, la Academia por unanimidad le designó como presidente honorario de la misma, título excepcional, la más alta distinción que podía otorgársele y que consagraba el reconocimiento de su notoria profundidad científica.

Se explica entonces porque su muerte, que tanto significa desde el punto de vista científico, haya traído una consternada emoción a nuestra Academia, en la cual su recuerdo será permanente e imperecedero.

Por ello y porque la Academia considera que encuadra dentro de su misión destacar la labor científica de este eximio colaborador, ha dispuesto realizar un acto público destinado exclusivamente a honrar la memoria del Holmberg y a la referencia de todos sus numerosos estudios científicos y de todo orden que ha podido abarcar la inmensidad de su genio y la polifurcación de su talento.

Este será el más justiciero homenaje que pueda rendirle nuestra Academia en la cual se recordará siempre su nombre con el afecto que supo inspirar su bondad y con el respeto que supo imponer su obra.

Discurso del señor Prof. ALBERTO CASTELLANOS

« La muerte pone cien años de distancia entre un día y otro », decía Buffon, y he aquí el caso. Con la serenidad de ese lapso, traigo el encargo de hacer uso de la palabra en representación de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires para despedir los restos mortales de uno de sus esclarecidos profesores, el Dr. Eduardo Ladislao Holmberg, el primer argentino que ocupa cátedras de Ciencias Naturales en esa casa de estudios.

Su acción no se localiza solamente a este punto sino que se dirige también a otros, hasta por el periodismo. Arquetipo del docente universitario por su vasta cultura y por ser fiel obrero intelectual en todas sus manifestaciones, busca en la prédica desinteresada del divulgador un complemento de su enseñanza oficial y un campo de acción más para sus actividades. Haciendo caso omiso de lo que generalmente ocurre, cuando un grande hombre muere, una turbamulta de incapaces pugnan interesados en considerarle su maestro, lo cierto es que no podrá hablarse de un discípulo, porque todos los jóvenes de su época, el que más o el que menos no pueden dejar de reconocer que en algún momento de su vida, en aquel que más se siente la necesidad del director espiritual, su prédica o sus obras escritas, modo de enseñanza más perdurable que el de la palabra, le sirvieron de guía. Fué su maestro. Con capacidad sin igual supo dirigirse al corazón del joven, despertándole su vocación, ese dios interior de cada uno, sin dejar de ser colega de los especialistas.

Su obra no tiene caracteres netos, como es natural que lo fuese por la época en la cual actuó, sin tradición científica. A su personalidad de hombre de ciencia no hay que analizarla en sus especialidades porque no se la hallará a la altura de la ciencia de la época. Hay que tomarla en conjunto, los tiempos en que actuó no le permitieron otras disciplinas ni otra escuela que su propia vocación. Fué un autodidacta.

Más que el zoólogo, el botánico etc., es el precursor de toda una corriente intelectual que a pesar de sus vicisitudes no se extingue, como ocurrió con la escuela científica de profesores alemanes en Córdoba importada por Sarmiento. Aquellos valores exóticos se anularon adaptándose al ambiente; en cambio Holmberg, él solo, nunca fué adaptado al medio. Luchó sin cobardía, con la misma obstinación que le persiguieron. Sus más rudos lances los libró por la causa de todos los tiempos: la libertad de las ideas. Y lo hizo con cariño profundo y sentimiento elevado de artista, por inculcar la observación, el estudio y también la comprensión de la Naturaleza. Es uno de nuestros próceres de la paz, de aquellos que resisten tenazmente toda la vida al asedio de la rutina, de la incompreensión, cuando no de la frialdad de la indiferencia. Pero nunca podrá llegar a ser figura popular, por la misma razón que él dió en igualdad de circunstancias para Ameghino: « porque siempre se dirigió a lo más hondo del cerebro humano ».

Naturalista de corazón, no sólo estudiaba la Naturaleza, dislacerándola fríamente en sus especialidades, sino que la sentía armónica en sus manifestaciones y bregaba por transmitir las al medio con las polimorfos vibraciones que la concebía, a pesar de la atención utilitaria ancestral de la que únicamente son capaces de prestarle los pueblos de raza mediterránea.

Conversaba con Holmberg después del primer congreso de naturalistas acaecido en Tucumán para el centenario de nuestra emancipación política, y me decía: « hemos triunfado ». Cuando podría arrogarse toda la gloria para sí y decir: « he triunfado », ya que aquella reunión era la obra resultante de su prédica, llevada a feliz término por sus discípulos. Tales eran sus preocupaciones y entusiasmos a una edad en que el espíritu busca el reposo. ¡ Viejos no son los que peinan canas sino aquellos que dejaron morir su espíritu y la bestia les sobrevive !

De su obra ¿ qué respetará el tiempo ?, ese juez ecuánime que consuela, suaviza, destruye y también valora. Algunas de sus publicaciones y las orientaciones por las cuales bregó tanto infatigablemente y que cotidianamente dan sus frutos en cada joven iniciado con verdadera capacidad en las disciplinas intelectuales de su predilección.

Si en el ocaso de su vida disminuyó la luz de sus rayos, las nuevas generaciones prolongarán sus destellos, no solamente por años que dura la vida de los hombres sino por épocas, que es la de los pueblos.

Artículos del Dr. E. L. HOLMBERG publicados en los "Anales de la S. C. A."

1879. — Sobre las especies del género *Bombus* halladas en la República Argentina. Tomo VIII, pág. 154.
- 1881-1883. — Géneros y especies de *Arácnidos* argentinos nuevos o poco conocidos. Tomo XI, pág. 125; 169; 271; tomo XV, pág. 232.
1881. — Sobre las especies argentinas del género *Pompilus*. Tomo XII, pág. 131 y 273.
1884. — Sobre algunos *himenópteros* de la República Oriental del Uruguay. Tomo XVIII, pág. 201.
- 1886-1888. — Sobre *ápidos* nómades de la República Argentina. Tomo XXII, pág. 231 y 272; tomo XXIII, pág. 17 y 67; tomo XXVI, pág. 118.
1886. — La noche clásica de Walpurgis. Tomo XXII, pág. 241.
1889. — Los peces. Tomo XXVIII, pág. 100.
1890. — Discurso pronunciado en las exequias fúnebres del doctor Rawson. Tomo XXIX, pág. 194.
- . — Jardín Zoológico de Buenos Aires. Tomo XXX, pág. 5.
1891. — Aves libres en el Jardín Zoológico de Buenos Aires. Tomo XXXII, pág. 176.
1894. — Molestias de viaje. Tomo XXXVIII, pág. 53.
- . — Apuntes arqueológicos. Tomo XXXVIII, pág. 283.
1895. — Las plagas de Egipto, explicadas científicamente. Tomo XL, pág. 291.
1896. — Pinceladas descriptivas. Conferencia. Tomo XLII, pág. 257.
1898. — Una crítica sobre la Flora Argentina publicada en el Segundo Censo de la República Argentina. (tomo I, pág. 385-474). Tomo XLVIII, pág. 257.
1900. — Sobre un representante de una familia nueva para la Flora Argentina. Tomo XLIX, pág. 22.
1901. — De Siglo a Siglo. Conferencia leída en la fiesta conmemorativa del 29º Aniversario de la Sociedad Científica Argentina. Tomo LII, pág. 51.
1902. — Museos provinciales y Museos regionales. Tomo LIII, página 271.
1903. — La imitación en la Naturaleza. Tomo LVI, pág. 104.
1906. — Presentación del Dr. Ameghino en el 34º Aniversario de la Sociedad Científica Argentina. Tomo LXII, pág. 131.

SECCIÓN OFICIAL
DE LA
SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
SECCIÓN "SANTA FE"

Ciclo de Conferencias.

Conferencias de los Dres. JAKOB y FESTER

La Sociedad Científica Argentina (Sección Santa Fe) organizó durante los días 1º y 2 de Octubre del corriente año dos conferencias sobre temas de geografía argentina. Dichas conferencias estuvieron a cargo del Dr. Cristofredo Jakob, la primera, quien se refirió al tema: « Necesidad de fiscalizar las reservas acuáticas andinas en la República Argentina » y del Dr. Gustavo A. Fester, la segunda, que se ocupó de « Viaje de estudio a la zona magallánica y Tierra del Fuego ».

Ambas conferencias se celebraron en el salón de actos de la Facultad de Química Industrial y Agrícola, siendo ilustradas con diapositivos y películas cinematográficas tomadas por los Dres. Ricardo y Germán Jakob, y se realizaron bajo los auspicios del Instituto Social de la Universidad N. del Litoral.

A continuación publicamos los resúmenes de esas conferencias.

**NECESIDAD DE FISCALIZAR LAS RESERVAS ACUATICAS ANDINAS
EN LA REPUBLICA ARGENTINA**

El conferencista, desde hace varios años, dedica su labor de explorador a la zona al sur del Lago Nahuel Huapí y del Cerro Tronador. Se trata de la comarca del Río Manso que ofrece uno de los tantos ejemplos de un « divortium » extraandino que habían dado lugar al litigio de los límites con Chile en el pasado. El río nace en la pendiente sureste del Tronador, tomando la dirección este

hasta el Lago Masecardi. Pero luego, estando la salida natural hacia el Lago Gutiérrez (y el Nahuel Huapí) tapado por acumulaciones morénicas, el desagüe del Masecardi «captado» desde el oeste, toma, por varios lagos chicos, el rumbo hacia el Pacífico o sea el seno de Reloncaví. De esta manera se pierden las aguas de una zona amplia para la Patagonia argentina y sin ningún provecho para el lado chileno, donde ya sobran las precipitaciones. A raíz de estos hechos, el conferencista desarrolla un plan amplio para corregir este «divortium» desfavorable. El propone de cerrar el desagüe actual del Masecardi o sea la salida de Río Manso medio y de cortar el puente terrestre entre este lago y el Gutiérrez, Aumentando así el caudal del Río Limay, el desagüe del Nahuel Huapí, se propone además de endicar este río antes de su unión con el Río Neuquén para desviar una parte de sus aguas por el lecho antiguo, actualmente seco, hacia el Golfo de San Matías. De esta manera sería posible de convertir este valle árido en una zona fértil similar a la del Río Negro.

VIAJE DE ESTUDIO A LA ZONA MAGALLANICA Y TIERRA DEL FUEGO

El viaje, en compañía del Dr. Ricardo Jakob y de dos alpinistas alemanes tenía por objeto estudios geográficos en la zona del Seno de la Última Esperanza y de Tierra del Fuego. Se visitó la Cordillera Payne, al borde del hielo continental, efectuándose por los alpinistas la primera ascensión de la cumbre este (Cerro Almirante Nieto). La cordillera es un lacolito de granito claro, que lleva en parte todavía la cubierta de pizarra oscura cretácea, poco metamorfoseada con excepción de las partes de contacto inmediato, transformadas en roca córnea. La pizarra está atravesada por numerosas vetas aplíticas, mientras que en el antepaís se notan tales de carácter lamprofírico.

La pizarra suprasenoniana, a veces alternando con conglomerados, sigue hasta la cercanía de Puerto Natales, constituyendo especialmente la Cordillera Arturo Prat, que era también objeto de estudios. Está agrupada alrededor de un valle sinclinal que abarcaba un glaciar lateral con relación al glaciar grande cuyo lecho hoy día está ocupado por el fjord de Última Esperanza; se nota todavía la interferencia de los dos glaciares por el material distinto de las morenas. En varias ascensiones de cerros se alcanzó el límite de la

glaciación actual, sumamente reducida. Toda la comarca aparentemente está en ascenso, a juzgar por las terrazas en la orilla del fjord.

En Febrero se visitó la Bahía Negri de la Península Brecknock en la parte oeste de Tierra del Fuego, igualmente con algunas ascensiones. Se comprobó que casi toda la península está constituida por granodioritas, indicando recién al norte de la Bahía Júpiter un banco de anfibolita el tránsito a la roca metamorfoseada. Luego, los alpinistas se dedicaron a la Cordillera Darwin, efectuando la primera ascensión del Monte Italia, mientras que el conferencista con el Dr. Jakob siguió viaje por el territorio argentino, tomando el nuevo camino de Ushuaia al Lago Fagnano. Se hicieron observaciones especialmente en la Cordillera Alvear, efectuándose la primera ascensión de la cumbre helada más alta de todo el territorio nacional de Tierra del Fuego. Esta zona de la cordillera fueguina representa una estructura ímbrica, pórfido cuarcífero, a veces laminado hasta sericita, sobreescurrido encima de la filita oscura, la roca principal del este fueguino. A raíz de éste y otros viajes se cree, que ninguna de las formaciones fueguinas sea más antigua que el mesozoico y que el alto grado de metamorfosis de la Cordillera Darwin quizás tenga relación con la desviación general del rumbo de la montaña fueguina.

Sesión de comunicaciones del 10 de Diciembre de 1937

Bajo la presidencia del Dr. Gustavo A. Fester se realizó en una de las aulas de la Facultad de Química Industrial y Agrícola el 10 de Diciembre a las 19, una sesión de comunicaciones científicas, cuyos resúmenes se publican a continuación:

SOBRE LA NATURALEZA DE LAS ROCAS DE LA CANTERA AGUIRRE DE LAS SIERRAS DEL TANDIL Y SU DIFERENCIACION

Por GREGORIO KLEER

La comunicación tiene por objeto ilustrar con un caso concreto la aptitud y utilidad del método de Becke-Niggli de « Representación gráfica de análisis de rocas » para la exacta identificación de las mismas.

El autor de la comunicación hizo breves consideraciones sobre el objetivo de los estudios petrográficos en sí: la identificación de las rocas con el conocimiento de sus propiedades, y la reconstrucción de su historia o sea su génesis y evolución.

Refiriéndose a los métodos de estudio empleados en el laboratorio para la identificación de una roca, puntualizó que esta identificación consiste en determinar la composición mineralógica y química, textura, estructura y origen: estos datos complementados con las observaciones sobre el terreno son los que permiten al petrógrafo dar nombre a la roca y reconstruir la historia de la misma. Los métodos empleados para llegar a ello son: 1º) el estudio directo por examen de las rocas en bruto o convenientemente preparadas, a simple vista o con ayuda de aparatos ópticos; 2º) el estudio indirecto por análisis físico y por análisis químico; destacó la importancia cada vez mayor adquirida por los métodos químicos, pero que la aplicación simultánea y complementaria de los diferentes métodos, convenientemente elegidos, es la mejor manera de llegar al objetivo perseguido.

Resumió los métodos más comunes de representación de la composición química de las rocas (polígono estrellado de Brögger, triángulo de Ossan y tetraedro de Niggli) para explicar finalmente el método de Becke de proyección sobre las caras del cubo y del rombododecaedro circunscriptos al tetraedro, del punto representativo de la composición química de la roca, de acuerdo a los valores de Niggli, y las ventajas del mismo de que las rocas ígneas típicas tanto de la serie Atlántica como de la Pacífica, forman cada una, una cadena neta: y por lo tanto, al ser estudiada una nueva roca, su punto representativo nos indicará a qué serie pertenece y a cuál de las rocas típicas se aproxima por su composición; todo lo cual deberá necesariamente ser complementado con el estudio óptico-mineralógico.

En la comunicación el autor aplica las consideraciones anteriores a cuatro rocas de la cantera Aguirre de la Sierra del Tandil.

SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS Y PRIMITIVAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

Por JOSE BABINI

En esta comunicación el autor estudia algunas relaciones entre las derivadas sucesivas de la función $(1 - x^2)^n$; es decir, entre las derivadas y ciertas primitivas de los polinomios de Legendre $P_n(x)$. Entre las propiedades estudiadas figura una relación de simetría

$$\frac{D^{n-r}(1-x^2)^n}{n-r} = (x^2-1)^r \frac{D^{n+r}(1-x^2)^n}{n+r}$$

y una extensión de la fórmula de Dirichlet que expresa $P_n\left(\frac{\theta}{2}\right)$ siendo $x = \cos \theta$.

LA GEOQUIMICA DEL VANADIO

Por G. A. FESTER

El elemento vanadio es uno de los más divulgados en todas las zonas de la esfera terrestre, entrando tanto en la siderósfera, calcosfera, litosfera y hasta en la hidrósfera y biósfera. Esta ubicuidad se debe por una parte a la facilidad con la cual el elemento pasa de un grado de oxidación a otro, y por otra parte al carácter del elemento como uno « de límite », en la curva de los volúmenes atómicos y en el diagrama del potencial iónico, imitando, según la valencia, el comportamiento de otros elementos vecinos.

Parece que el vanadio, en la cristalización primitiva del magma, se enriquece en primer lugar en los minerales básicos, pesados, substituyendo, en forma trivalente, al hierro y aluminio. Durante los fenómenos pneumatolíticos e hidrotermales, puede acumularse también en sulfuros, que luego dan origen a la formación de vanadatos (vanadinita etc.). Por otra parte, después de la eflorescencia de la roca primitiva, el vanadio está transportado, en forma disuelta o adsorbido en sustancias de carácter coloidal, para ser precipitado luego en medio sapropélico por hidrógeno sulfurado; así se encuentra enriquecido en todos los sedimentos que tienen su origen en sapropelios o gyttjas.

Del sapropelio marino el vanadio pasa a los esquistos bituminosos y de éstos a petróleos asfaltíferos y asfaltitas, indicando su presencia una temperatura elevada de la expulsión, por ejemplo por influencias secundarias magmáticas. Es muy probable, que el vanadio actúe como catalizador en la formación de materias asfálticas, produciendo el desprendimiento de hidrógeno sulfurado, condensándose así los hidrocarburos directamente o por intermedio de puentes de azufre. La acumulación mayor del vanadio, que se conoce, o sea la patronita peruana, deriva indudablemente también de sulfuro de vanadio disuelto en asfaltita e insolubilizada por una segunda penetración de roca ígnea en la materia bituminosa.

LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS EN NUESTRA LEGISLACIÓN CIVIL

POR EL

INGENIERO CARLOS WAUTERS

(Conclusión)

IX. — LAS PRETENDIDAS DIFICULTADES QUE LA DETIENEN EN SU ESTUDIO

La identidad de las situaciones de los dos sistemas de aguas frente a las dificultades que la Comisión Reformadora descubre es absoluta. Bastan breves consideraciones para demostrarlo. Analicémoslas en el mismo orden en que las presenta ⁽³³⁾:

I. — *Constitución de las napas independientes de las divisiones artificiales del dominio.* — Cualquier río o arroyo, muchas veces el más insignificante torrente, afecta varias propiedades a la vez: sus hoyas hidrográficas no respetan las divisiones artificiales del dominio del suelo, ni para unidades administrativas mayores, ni para las territoriales que separan naciones limítrofes enteras. De aquí precisamente la existencia de frecuentes tratados internacionales concertados para el aprovechamiento de las aguas de uso común, los convenios interestaduales e interprovinciales en los países en que se respetan sus autonomías y jurisdicciones respectivas. En fin, para divisiones menores, nuestra propia legislación civil ofrece el caso más corriente cuando declara todas las aguas de dominio público, para conservar en manos del estado los múltiples resortes que constituyen el poder de policía sobre su uso y goce por los particulares, al través de las arbitrarias y crecientes subdivisiones del suelo, independientes de las leyes más elementales de la hidráulica y de la hidrografía.

(33) Ob. cit., pág. 14.

II. — *Peligro que se inficionen.* — Siempre será menor que para las superficiales que causan en los higienistas, no sólo de la Argentina sino del mundo entero, constantes y justificadas preocupaciones; y que, no obstante las reglamentaciones que, con éxito creciente, consiguen hacer adoptar con sus perseverantes campañas, preconizan el aprovechamiento preferente de las aguas subterráneas, potables o no, según que aquél sea de tipo doméstico, industrial o agrícola.

III. — *Captación abusiva en perjuicio de los fundos vecinos.* — « Mucha agua para tu molino, poca para el de tu vecino » es refrán de vieja tradición que, siempre y en todas partes donde el agua se aprecia en su justo valor, ha exigido la más severa policía en la explotación del aprovechamiento de las aguas superficiales, en cualquiera de sus múltiples aplicaciones.

IV. — *Dificultad de aplicar los mismos principios a regiones distintas.* — Es concepto salvado con admirable acierto por nuestro codificador quien, ante la realidad geográfica de nuestro privilegiado territorio, se limitó a sentar preceptos esenciales para una legislación civil, con el deliberado propósito de dejar a « las ordenanzas generales o locales » previstas en su art. 2341, la tarea de interpretarlos con acierto para amoldarlos al ambiente, en forma que su aplicación respondiera a las necesidades reales de las distintas regiones del país, tan variables en la superficie como en el subsuelo.

V. — *Comprobación de esta variedad de situaciones revelada por las investigaciones geológicas y por las perforaciones realizadas que han denunciado diferencias de profundidad, cantidad y calidad de aguas.* — Tal como pasa con la hidrología superficial que confirma, diariamente, la individualidad característica de cada corriente de agua en que, a la irregularidad manifiesta de los fenómenos climáticos que afectan al país, se agrega la infinita variedad de combinaciones de los factores físicos determinantes, derivados de la altitud y de la latitud de nuestros suelos.

VI. — *Necesidad de arbitrar los medios para que los indudables derechos de los propietarios, en la medida de sus necesidades, no se vean obstaculizados por una ingerencia arbitraria de los poderes públicos.* — La verdadera tarea del codificador se reduce a facilitar la realización de las tres aspiraciones concretas de este enunciado, tal como las concibió el código. No las silenció por cierto, ni resolvió dete-

nerse ante las dificultades que podían presentarse. Dentro de la unidad de la estructura jurídica que impuso para el aprovechamiento de todas las aguas, contempló los tres preceptos enunciados, sin entrar en las minucias de una reglamentación que expresamente rehuyó, por consideraciones de alta previsión, económica y social, impuesta por la misma realidad de los hechos que su legislación debía amparar.

Si la Comisión Reformadora se atiene estrictamente a su función específica de legislar y deja al técnico, en materia de aguas, la que le incumbe, las dificultades que pretende haber descubierto y que tanto le han impresionado, en realidad no existen, ni como propias, ni como exclusivas de las aguas subterráneas. Para el técnico, ni son serias, ni son graves: son análogas a las que ofrecen los aprovechamientos de las superficiales cuando se pasa del terreno abstracto de la teoría al práctico de la realidad. Es inconsistente el argumento en que se funda la Comisión Reformadora para «dejar a una ley especial el estudio de las reglas flexibles que la materia requiere», pues tanto o más flexibles son las que reclaman las aguas superficiales que no arredraron al codificador en el siglo pasado: al respetar la unidad física y natural de todas las aguas, y sin alterar la jurídica correlativa pudo incorporarlas a su código con admirable acierto y patriótica previsión.

Separar la legislación de aguas según que corran encima o debajo del suelo resulta prácticamente imposible, dentro de la unidad del proceso de circulación natural de las mismas: esta doble legislación provocaría un semillero de inútiles conflictos. Desde el momento que el código Civil se ocupa de las relaciones jurídicas entre particulares; y que la Comisión Reformadora admite que ellas existen cuando éstos aprovechan las aguas, en cualquiera de sus aplicaciones, no es posible suponer que sólo puedan interesarla cuando pertenecen al sistema hidrológico superficial y tengan que llevarse a una ley especial cuando respondan, sin límites estrictos y posibles, al sistema hidrogeológico subterráneo.

X. — PERJUICIOS QUE TRAERÍA UN NUEVO CÓDIGO INCOMPLETO EN LA MATERIA

A nuestro juicio un simple error de interpretación objetiva puede justificar la tesis de la Comisión Reformadora que comentamos. En el texto del código existen preceptos *inflexibles*, fundamentos esenciales para una verdadera legislación civil. En cambio, «en las orde-

nanzas generales o locales » de su art. 2341 están las reglas *flexibles* que la materia requiere, dentro de aquéllos, interpretados y aplicados con honestidad para responder a las necesidades variables del ambiente físico regional. No es ya el aspecto legal el que ha de primar en estas ordenanzas sino el técnico, pues es la realidad física, son los hechos que ella exterioriza con una experimentación adecuada, los que deben señalarlas, sin que ello importe apartarse ni alterar aquellos preceptos generales y orientadores.

En casi todas las provincias se ha procedido a la inversa al sancionar y aplicar esas ordenanzas. Se insiste en hacer creer al vulgo que el aprovechamiento de las aguas es función legal y no esencialmente técnica; y con ello, desde los cargos directivos, poder servir inconfesables intereses políticos que la Comisión Reformadora vendría a proteger involuntariamente. Es el sistema que, con métodos y prácticas que arruinan a los propietarios en vez de beneficiarlos como suponen, bajo la influencia de tradicionales rutinas, se ha mantenido desde la sanción del código, y que reclama una urgente y correcta rectificación, no del código inflexible sino precisamente de aquellas reglas flexibles que no lo respetan como debieran hacerlo. Con ello sólo se pretende consolidar acomodos y favorecer especulaciones que hemos denunciado muchas veces, fomentadas al amparo de una desorientación general que se procura acentuar con toda intención.

Con las aguas subterráneas debe procederse del mismo modo que con las superficiales, dentro de la unidad del proceso natural que las mueve: excluir del nuevo código « todas las reglas flexibles » que pertenecen a aquellas ordenanzas y no dejar en el mismo sino los preceptos inflexibles y esenciales. Nunca llevar a una ley nacional como es el código reglas flexibles, aun cuando aquélla fuera de carácter especial como propone la Comisión Reformadora, pues resultaría una incomprensible colección de normas contradictorias, admirable semillero de interpretaciones abstractas encontradas, como pueden llegar a serlo las que convienen al ambiente físico de Jujuy frente al de Santa Cruz, al de San Juan comparado con el de Entre Ríos, para citar casos extremos y no los centenares de características diferentes que esas reglas interpretarían, por otra parte, forzosamente variables en el tiempo para un mismo lugar. Al reunirse para formar una ley especial pero nacional se vería sujeta a inevitables y frecuentes modificaciones, siempre difíciles de conseguir en la hora oportuna en nuestro H. Congreso, aun cuando se la designara con el nombre de « có-

digo de aguas » como pretenden llamarla algunos, no obstante ser obra de reglamentos flexibles y no de legislación estable.

Una de dos soluciones. O el nuevo código Civil, para llevar un sello que le permita considerarse moderno, incorpora a su texto, en forma clara y precisa, los preceptos inflexibles que las aguas subterráneas reclaman para satisfacer las necesidades urgentes de más de la mitad de nuestro territorio, idénticos o análogos a los que rigen para las superficiales, o bien elimina totalmente los que considera admisibles para el sistema hidrológico superficial, para hacer del código un instrumento legal aun más incompleto que el propuesto por la Comisión Reformadora. Si con este segundo temperamento acentúa la concisión que persigue para su proyecto al suprimir aun más artículos, en cambio, facilita el propósito de los numerosos e influyentes interesados que, ante la inflexibilidad salvadora de los preceptos esenciales del código en vigor, procuran substraerse al mismo con la perspectiva de obtener mayor éxito con la gestión de una ley o código especial. No olvidan, por cierto, que Bossuet escribía: « L'interêt n'a point de maximes fixes; il suit les inclinations, il change avec le temps, il s'accomode aux affaires ».

Sancionar, a sabiendas, un código incompleto, aun cuando se cumpliera la promesa de incorporarle luego la ley especial que la Comisión Reformadora reclama, importaría inferir un enorme perjuicio a la región árida del país, mucho más que a la húmeda en que no se perciben ni valoran como en aquélla los problemas que afectan a las aguas, y muy en especial a las subterráneas que tanto deben influir en la transformación económica de aquélla. Es afirmación tanto más exacta, cuanto que la unificación del régimen legal de todas las aguas en el código y de sus inflexibles preceptos, se precisa y afianza con muy pocas palabras agregadas a su texto, como veremos más adelante. La postergación propuesta no puede ni debe aceptarse.

La experiencia enseña, en efecto, que es la primer providencia que ha de imponerse al pretender valorizar tierras áridas; y las extensas nuestras reclaman imperiosamente el acatamiento local de nuestra legislación civil, si se quiere, previamente aclarada en este especial aspecto de las aguas subterráneas, para poder exigir su cumplimiento estricto así como para promover el fomento acertado y juicioso de su aprovechamiento por los particulares. Sir Willcocks, después de una actividad sostenida y coronada de éxito, desplegada durante treinta años consecutivos para modernizar los regadíos de la India y el Egipto, consultado respecto a las posibilidades agrícolas de las regiones

áridas del Africa del Sur, afirmó en 1902 que, antes que cualquier obra, debía imponerse una legislación que declarara de dominio público todas las aguas indistintamente ⁽³⁴⁾.

Confirma esta misma tesis el interesante proceso experimental realizado, en igual ambiente, en el Africa del Norte y que hemos recordado. Argelia, recién después de 20 años de ocupación francesa, obtuvo su primer estatuto legislativo para fijar el régimen jurídico en la explotación de sus aguas. Túnez, más tarde, lo recibió a los 4 años de establecerse el protectorado. Marruecos, en cambio, a los 2 años incorporaba la mayor parte de las aguas al dominio público. Ante esta sugestiva progresión, fruto de la experiencia adquirida por Francia, admite ahora sin discusión que, en el caso de una nueva y eventual ocupación en ambiente comparable, entre las primeras providencias, quizá al día siguiente, se decidiría a « adaptar nuestra ley humana a las leyes naturales particularmente imperiosas » del medio físico a explotar: así lo afirma quien ha profundizado el estudio de este largo proceso legal, esencial para el eficaz desarrollo de las regiones desérticas ⁽³⁵⁾.

XI. --- ENSEÑANZAS QUE NOS OFRECEN LAS NACIONES PRECURSORAS

Un sólo ejemplo citaremos para mostrar las deplorables consecuencias de no proceder *ab initio* con igual previsión. Basta describir, en los términos más breves posibles, la situación creada en los E. U. de N. América con la explotación de las aguas subterráneas que, en razón de la unidad de orden físico a que nos referimos antes, nos exigirá alguna rápida referencia a las superficiales legisladas desde la antigüedad romana o aún antes, mientras que para aquéllas recién despierta interés de un siglo a esta parte.

Es nación en que no existe una legislación orientadora federal única, sino que los numerosos estados que la constituyen han conservado su amplia libertad de acción en la materia. Dentro de la autonomía institucional de que disfrutan, sostienen sus propias doctrinas con empeño en los conflictos surgidos con estados vecinos, o con el mismo estado federal que no tienen reparo en llevar ante los más altos tribunales de justicia. Es al extremo que se ha llegado al convenci-

⁽³⁴⁾ TH. REHBOCK, *L'utilisation de l'eau dans les pays sous-tropicaux*, en *Compte Rendu de l'Institut Colonial International*, session de 1905, pág. 425.

⁽³⁵⁾ A. SONNIER, *Le régime juridique des eaux au Maroc*, pág. 46.

miento que resulta más práctico, rápido y económico concertar acuerdos directos, aun cuando algunos resultan complicados y provocan largas controversias, como en el caso del celebrado para el aprovechamiento de las aguas del río Colorado que precedió a la construcción del gran dique Boulder.

La ley romana inspiró la « common law » inglesa que, por semejanza de ambientes físicos, pudieron admitir los trece estados fundadores sin dificultades de aplicación. Otro tanto pasó en las colonias francesas vecinas con el código Napoleón, de igual fuente jurídica. Las aguas eran originariamente comunes a todos; pero, desde el momento que el derecho de propiedad del suelo se afianzó, las aguas perdieron aquel carácter, salvo para los fines de la navegación en ríos, lagos o mares. Quedaron acaparadas entre los dueños ribereños con exclusión absoluta de los restantes, aun cuando sus heredades estuvieran situadas dentro de la misma hoya hidrográfica cuyas aguas alimentan la corriente.

Este *derecho del ribereño* no es ilimitado, pues no le acuerda privilegio alguno frente a los otros. Ninguno puede hacer reservas de agua para usarla en época de penuria, sino que está obligado a servirse de ella, en todo momento, tal como se presenta el derrame natural, en proporción a la necesidad de su fundo, sin afectar el derecho que corresponde a todos y a cada uno de los restantes. Así se impone la distribución de tipo *proporcional*, sin resultado práctico en corriente cuyo caudal de derrame sufre grandes oscilaciones, pues se producen inevitables e importantes pérdidas de agua en las épocas de abundancia. Por otra parte, la doctrina del derecho ribereño no es de interpretación uniforme en todos los estados, como no lo ha sido en las otras naciones que la adoptaron: en todas la distribución proporcional es resabio de ella.

En los estados áridos, donde vale más el agua que la tierra, esta doctrina ha sido substituída por la de la *apropiación* en que es primero en derecho el primero en asegurarla. Su titular puede ejercerlo tanto tiempo como lo juzgue conveniente a su interés, aun cuando use toda el agua de la corriente, salvo la que reclaman terceros para usos domésticos. Es un derecho sobre el agua que equivale al de propiedad del suelo, o que se le asemeja en muchos aspectos, siempre más acentuado y amplio que en la doctrina del ribereño y que se ejerce sin más restricción que la impuesta por el privilegio de una apropiación de fecha anterior. Era la doctrina imperante en México y, en general, en todas las colonias de influencia hispana. Nótese

que, mientras el suelo es de posición y extensión fijas, el agua es de caudal continuamente variable, de modo que se asocian mal estas apropiaciones de características tan encontradas. De aquí el origen de los embalses que acumulan aguas que no han caído en la apropiación y que, en realidad, escapan a su régimen legal.

Las dos doctrinas, antes que todo, preocupadas del dominio sobre las aguas, ni protegen la forma de derivarla ni los otros aspectos de su explotación en sus respectivos estatutos legales. Oportunas convenciones directas provocadas por la construcción de grandes obras, en otros casos por sucesivas sentencias judiciales, limitaron los alcances originarios de aquellas doctrinas en el sentido de establecer que el uso del agua fuera el *racional*, esto es, el único realmente beneficioso para los particulares y para la comunidad. Así varios estados, en distintas épocas de su historia, substituyeron la doctrina del ribereño por la de la apropiación *limitada*; de los últimos en hacerla ha sido el de Montana en 1921, a mérito de una sentencia de la Corte. En otros, en cambio, las dos doctrinas subsisten en zonas de distinto ambiente físico, sin despertar conflictos de importancia, pues en ambos casos se han sometido a la condición del *uso racional* que iguala las situaciones y resta valor a estas diferencias doctrinarias iniciales. Es, también, el caso de California que conserva la doctrina del ribereño, pero, por reciente resolución de la Corte de 1935, con igual restricción de uso razonable.

Sin poder entrar aquí en mayores detalles, recordemos que en los conflictos que despierta la explotación de las aguas superficiales entre estados, la Suprema Corte es la única autoridad judicial con jurisdicción para intervenir. En sus fallos respeta la doctrina local, cualquiera que ella sea; pero cuando la de apropiación no impera en los dos estados o en todos los que intervienen en el litigio, muestra marcada tendencia en asegurar una distribución equitativa de las aguas sobrantes, sin alterar los usos existentes. Procura mantener esta situación con promesa de revisarla cuando la experiencia señale su necesidad. Así parece probable que se mantengan las actuales doctrinas legales en los pequeños sistemas; pero que la construcción creciente de embalses traiga aparejada la modificación de su interpretación, para asegurar una distribución uniforme pero flexible de las aguas perdidas sin ellos; y que de tal modo se establecerán estatutos de conciliación para los más grandes sistemas de aprovechamiento. En otros términos, las dos doctrinas fundamentales

subsistirán para los aprovechamientos reducidos; y ambas, con serias modificaciones, para los de mayor importancia. De cualquier manera, se comprueba que todos los esfuerzos realizados no han conseguido alcanzar la unidad de la legislación para las aguas superficiales; y que hay que perder toda esperanza de obtenerla en lo sucesivo. Un error inicial ha creado derechos adquiridos que se defienden con empeño y en toda forma, muchas veces con sacrificios de dinero y de tiempo.

Dentro de tan heterogénea situación no es posible admitir que haya podido despertarse un criterio legal único para la explotación de las aguas subterráneas. Sin analizar el largo proceso de evolución que se ha elaborado en este complicado ambiente, conviene recordar que la más reciente e importante resolución judicial ha sido para reconocer legal la correlación del sistema subterráneo y del superficial de las aguas, cualquiera que sea la doctrina a que están sujetas estas últimas. Los hechos parecen confirmar las ventajas de esta identidad de régimen, pues California, con la doctrina ribereña, y el Colorado, con la de la apropiación, son los dos estados que solos absorben el 41,9 % de todos los regadíos de la Nación.

Es fallo de alta influencia frente a las cuatro doctrinas legales en vigor para las aguas subterráneas. Reconoce: la 1ª el derecho absoluto sobre el agua a favor del dueño del terreno en cuyo subsuelo se encuentra, sin obligación de respetar los derechos de terceros, doctrina del *uso irracional* que los americanos llaman *inglesa*; se aplicó, también, en las tierras sin valor del Africa donde el agua subterránea pertenece a quien la saca, régimen individualista por excelencia; la 2ª limita este derecho al *uso racional*, con prohibición de llevar el agua a distancia si con ello se causa algún perjuicio, doctrina *americana*; la 3ª identifica los derechos sobre las aguas subterráneas con el correlativo sobre las superficiales, cualquiera que sea la doctrina a que éstas se hallen sometidas, doctrina *californiana*; y la 4ª atribuye el agua en propiedad al dueño del suelo bajo el cual se halla, pero bajo la fiscalización del estado para hacer respetar los derechos privilegiados sobre las aguas superficiales o sobre las subterráneas que ellas alimentan, doctrina de *la primer apropiación*.

Señalan imposiciones sucesivas de una fiscalización oficial creciente, o de una mayor amplitud en las facultades del poder de policía del estado, indispensables para asegurar la eficacia de un aprovechamiento intensivo de las aguas subterráneas, siempre posible a

medida que se perfecciona el conocimiento del sistema hidrológico a explotar.

XII. — PRECEPTOS ESENCIALES PARA UNA LEGISLACIÓN UNIFICADA

Toda vez que una verdadera legislación de aguas no responde exclusivamente a una disciplina jurídica abstracta sino que obedece, más que todo, a las realidades geográficas y económicas de la nación que ha de servir, tenemos que contemplarla bajo estos dos aspectos. Aquél es de orden puramente teórico, éste de orden esencialmente práctico: en sus modalidades debe inspirarse aquél para que no oponga inútiles trabas a las finalidades de éste. La diversidad del ambiente físico en nuestro dilatado territorio nos exige extrema prudencia en la legislación civil. Debe dejar a las ordenanzas locales una libertad de acción suficiente para poder establecer una reglamentación flexible, de lugar y de tiempo, con predominante interpretación técnica, puesto que son los hechos físicos los que priman, sin perjuicio del más estricto respeto de aquélla; es la única forma de asegurar su unidad directiva en todo el país y que el gobierno federal debía imponer siempre, por los medios indirectos a su alcance, antes de llevar cualquier forma de colaboración, de finanzas o de otra índole.

Las breves consideraciones formuladas nos muestran que la correlación del sistema hidráulico responde a la doctrina californiana, adoptada recién en 1935, pero que nuestro código reconoce desde la fecha de su sanción en 1869. Este repudia las fundamentales doctrinas americanas que han provocado tan múltiples conflictos en la explotación de las aguas superficiales y, por lógica consecuencia, en la de las subterráneas. En efecto, no admite ni la del derecho ribereño ni la de la apropiación, pues al declarar todas las aguas de dominio público, conserva un amplio y discrecional poder de policía para reglamentar su uso y goce por los particulares, en forma tan racional cuanto lo estime necesario para llenar la alta misión reguladora del estado. Sólo entrega al dominio privado muy escasas aguas, con restricciones de tal naturaleza que su importancia se reducirá siempre más, a medida que pasen al dominio público por aplicación del sencillo procedimiento administrativo que hemos señalado, al tiempo que aparezca un justificado interés colectivo por satisfacer.

Debemos mantener las restricciones al dominio de propiedad en los terrenos inferiores para todas las aguas en la forma que establece el código, lo mismo que la imposición obligatoria de la servidumbre de acueducto, pero en forma de dejar libertad al técnico para usar de uno u otro recurso, según lo aconsejen las circunstancias en cada caso concreto. Si el *Anteproyecto* y la Comisión Reformadora en su *Proyecto* aceptan, en esencia, sus disposiciones sobre el dominio de las aguas, difieren tan sólo en cuanto restringen o suprimen su protección al derrame en los terrenos inferiores, en forma perjudicial para la extensa región árida del territorio. En fin, debe expresamente excluirse de la legislación todo cuanto entrañe un propósito de reglamentación, pues ello debe dejarse librado a las ordenanzas locales, susceptibles de enmiendas frecuentes y diversas para las diferentes zonas afectadas, en procura de interpretación apropiada al ambiente, materia flexible por excelencia, hasta alcanzar una situación estable que consolide el uso y goce de las aguas; una vez que sea debidamente conocido su propio régimen.

En términos más concretos, procuremos en la legislación general, inflexible por definición:

- 1º Mantener la perfecta concordancia y armonía legal entre los sistemas hidráulicos superficial y subterráneo;
- 2º Acentuar el dominio público sobre todas las aguas indistintamente;
- 3º Restringir el dominio privado en todo cuanto sea racional;
- 4º Proteger el derrame de todas las aguas en terrenos inferiores, con preferentes miras al bienestar de la región árida del país;
- 5º Asegurar el fundamental precepto de la servidumbre forzosa de acueducto; y
- 6º Excluir todo intento de reglamentación.

Al referirse al aprovechamiento de las aguas subterráneas, la IV Conferencia Nacional de Abogados, bajo la presión de intereses a que nos referiremos enseguida, se hace solidaria de la desorientación que hemos denunciado varias veces. Declara, en efecto:

- 1º La ley deberá reglamentar la búsqueda, extracción y aprovechamiento del agua subterránea, inspirándose en los principios sentados por el código de Minas;
- 2º Deberá reglamentarse el derecho del propietario de extraer las aguas subterráneas de su fundo, de manera que no perjudique los aprovechamientos existentes, ni disminuya, ni desvíe las aguas del dominio público del estado.

Olvida que todo ello es materia de ordenanzas locales y no de legislación general: repitamos que ésta debe limitarse a no entorpecer ninguna de las múltiples formas de fomento que existen para la búsqueda de las aguas subterráneas y que dependen del lugar, no poner trabas a su derrame en los terrenos inferiores, y no exigir obras de importancia y costo prohibitivo en relación a los beneficios que de ellas pueden esperarse, como pueden resultar serlo los acueductos forzosos.

La identidad de situación de los problemas que despierta la explotación de las aguas superficiales y de las subterráneas, una vez expresamente declarada por ley, equipara los temas planteados por la Conferencia a los correlativos que afectan las aguas superficiales. El estado los resuelve todos, dentro de sus jurisdicciones respectivas, amparado en el amplio poder de policía que le permite proceder discrecionalmente, pues los permisos de uso y goce por particulares, sean las aguas superficiales o subterráneas, se rigen por análogas disposiciones, aun cuando sean variables en el detalle de su aplicación práctica.

Si se reclaman declaraciones expresas para las aguas subterráneas en particular, como lo hace la Conferencia a pedido de los representantes oficiales de las provincias que no cumplen a satisfacción las correlativas para las superficiales, es simplemente por desidia o por la indiferencia en que se mantienen las cuestiones que se refieren a la explotación de las aguas puestas en manos inexpertas. Manejan leyes y ordenanzas contrarias al código que el mismo gobierno de la Nación tolera y fomenta en provincias en que invierte millones en obras que no consiguen levantarlas de la postración económica en que se debaten, pero que contribuyen, en cambio, a arruinar las mismas tierras que se dicen favorecidas por ellas.

Es un admirable ambiente para explotar « los misterios » en que se pretenden envolver oficialmente las aguas de las ciénagas que se quieren hacer caer en el dominio privado, no obstante todas las declaraciones legales y administrativas que las consideran de dominio público y de utilidad general. En la región de Cuyo, ya en 1891, se autorizaba el uso de sus aguas, « pero en carácter de eventual, en atención a que son el resultado de filtraciones que pueden desaparecer por la desecación de las referidas ciénagas ». Los cultivos hechos con estas aguas, al margen de la ley, clasificados entre los *clandestinos* años más tarde, quedaron sometidos a fuertes contribuciones y multas. Los interesados sintieron la necesidad de eludirlas:

inventaron el recurso de obtener que se reconocieran estas aguas como de dominio privado. A los 30 años de semejante uso, eventual y precario, esto es en 1921, consiguen una declaración administrativa en ese sentido y, además, su incorporación en un padrón especial ideado para hacer creer en la legitimidad de la resolución. Pero como el proceso está al margen de la ley y de toda técnica, ya que las ciénagas y sobrantes se suprimen con la racionalización de la distribución de las aguas, la intranquilidad subsiste entre los interesados. Así aparecen todas estas iniciativas, inocentes para los ingenuos que pretenden legislar sin conocer los hechos en su realidad, hábilmente presentados para sorprender su buena fe. De ahí, también, la sistemática oposición a todo lo que importe suprimir los sobrantes y ciénagas, por reformas legales o sólo administrativas.

Una simple observación basta para mostrar la desorientación que informa las ponencias de la Conferencia. Importa un verdadero contrasentido la última parte de la 2ª declaración, pues si el estado conserva la policía de las aguas de su dominio y se reclama que la ley anhelada tenga que recomendarle que « ni disminuya, ni desvíe » las mismas aguas cuyo aprovechamiento fiscaliza, ello importa reconocer que el estado no cumple su cometido. Fácil es descubrir la verdadera intención que justifica el propósito de asegurar que no puedan disminuirse las filtraciones o pérdidas indebidamente apropiadas por los interesados, al amparo de semejantes ponencias, absurdas y peligrosas. Otros son los medios que deben conocer los abogados para corregir tales males.

No demos, tampoco, mayor importancia a otro grave error de la Conferencia. Si un siglo atrás y cuando se iniciaba el aprovechamiento de las aguas subterráneas en los E. U. de N. América, su justicia mantuvo, por algún tiempo y conforme a sentencias de 1843 y 1857, la norma inglesa de considerarlas regidas por el código de Minas, en cambio, a partir de 1862 se apartó abiertamente de ella para iniciar las más modernas tendencias a que nos hemos referido más arriba. Ahora, no podríamos volver nosotros a aquella anticuada tesis sin cometer un grave e incalificable retroceso para seguir inspiraciones de algunos, entre los que no pueden faltar asesores oficiales que, sin duda, lanzan la idea a simple título de « *ballon d'essai* » para hacernos caer en una interesada anticualla descartada con acierto por pueblos más experimentados que el nuestro en la materia. No se dan el trabajo de buscar en nuestro código la satisfacción de sus inconfesables aspiraciones egoístas.

XIII. — LAS AGUAS SUBTERRÁNEAS EN EL ARTICULADO PROPUESTO

Limitemos nuestra tarea a formular el articulado que, a nuestro juicio, debe corresponder a las aguas subterráneas sin ocuparnos de metodología jurídica. Dejemos a los juristas la de colocar los distintos artículos donde consideren más correcto hacerlo. Nos vemos en la ineludible obligación de incluir aquí algunos que corresponden a las aguas superficiales, en razón de la unidad y armonía que debe existir entre ambos sistemas de aguas utilizadas: oportunamente justificaremos más ampliamente su texto. Para mayor claridad conservaremos los números correlativos del código; y los del *Proyecto* de la Comisión Reformadora dentro de un paréntesis final. Aquéllos fijan el orden del

ARTICULADO PROPUESTO:

Art. 2340. — **Son bienes públicos de la Nación o de las provincias:**

inc. 3º— **Todas las aguas que corren naturalmente** (art. 118, inc. 3º).

Suprimimos las palabras del artículo correlativo del código: ríos por hallarse comprendidos entre «todas las aguas que corren», pues su empleo importa una repetición; *cauces* por tratarse de una superficie que se define recién en el inc. 5º en los mismos términos que lo hace el código en su art. 2577;

inc. 4º — **Todas las aguas durmientes en lagos, lagunas, charcas, esteros u otra depresión natural cualquiera** (art. 118, inc. 5º).

Con sumo acierto el código no ha separado los ríos navegables de los no navegables. No existe razón plausible para proceder de otro modo con las aguas estancadas e introducir diferencias en su dominio. La navegación es aprovechamiento que reclama, como cualquier otro, ordenanzas reglamentarias propias, sin necesidad de crear situación especial respecto al dominio de las aguas utilizadas.

inc. 5º — **Todos los cauces hasta el nivel que alcanzan las más altas aguas en su estado normal, aun cuando su derrame no sea permanente y siempre que no estén definitivamente abandonados por ellas;** (art. 118, inc. 3º).

Mantenemos la definición del código cuyo valor hemos ponderado después de un detenido análisis⁽¹¹⁾. Es concepto perfectamente aplicable a las aguas durmientes que tiende a acentuar

la unificación de la estructura jurídica con evidentes ventajas prácticas. El último párrafo aclara la situación accidental de las corrientes que presentan frecuentes cortadas en nuestra extensa región árida.

inc. 6° — Todas las aguas subterráneas.

Responde a la necesidad de refirmar la unidad que descubrimos en el código en materia de dominio sobre las aguas y que simplifica la interpretación de muchas de sus disposiciones. Viertan, broten o surjan las aguas por acción natural o por obra de arte, en fuentes o en pozos, su condición jurídica se identifica con la de las superficiales de que no se diferencian físicamente.

Art. 2350. — El dueño de una heredad tiene el dominio de las aguas, superficiales o subterráneas, que nacen y mueren dentro de sus límites; (art. 1571 y 76).

Substituimos la palabra «vertiente» del código: son las aguas las que vierten y de su dominio se trata. Suprimimos las palabras «uso y goce», superfluas desde el momento que al apropiarse de ellas su dueño queda facultado para disponer libremente de las mismas. Nuestro agregado nos permite la supresión del primer párrafo del art. 2637 del código que introduce, sin necesidad, una contradicción desde que deben brotar y morir dentro de la misma heredad. Brotar o surgir son formas de *nacer* para aguas subterráneas como lo son de *morir*, perderse o insumirse para las superficiales. Si nacer y morir son circunstancias visibles para éstas, en las subterráneas la identificación correlativa es más costosa pero técnicamente realizable. A título de ejemplo: si una hoya hidrográfica está contenida dentro de los límites de un latifundio y una capa impermeable del subsuelo hace que sus aguas se estanquen en la superficie dentro de aquél, es evidente que se trata de un típico caso de aguas privadas, ya se utilicen en su estado superficial o en el subterráneo. En cambio, pueden ser privadas las freáticas y no serlo, ni las semisurgentes ni las artesianas, aquéllas en razón de su origen dentro de los límites del mismo y éstas lejanas fuera de ellos: la técnica resuelve lo que no alcanza la ley.

Art. 2632. — Los dueños de los terrenos inferiores, sin adquirir derecho alguno sobre ellas, están sujetos a recibir:

inc. 1° — Art. 2634-35-36-37 y 53. — Todas las aguas que naturalmente descienden de los terrenos superiores, sin trabajo del hombre ni acto alguno que agrave la sujeción impuesta (art. 1576-77 y 78).

inc. 2° — Art. 2632-33 y 50. — Todas las aguas en cuyo derrame intervenga trabajo del hombre, cuando no pueda usarlas o contenerlas el predio supe-

rior; pero en tal caso con obligación de pagar una justa indemnización (art. 1576 y 78).

La unificación que procuramos acentuar nos permite la concisión que revelan estos dos únicos incisos, de sintética redacción, para respetar los correlativos conceptos del código, detallados con innecesarias repeticiones en los artículos substituidos.

Art. 2638-51 y 52. — En ningún caso estas aguas, hayan sido o no usadas, podrán contener materias, por cualquier concepto, nocivas para los usuarios inferiores, en cuyo caso deberán utilizarse o depurarse antes de salir de los terrenos superiores (art. 1578).

Es artículo que, al comprender las aguas subterráneas entre todas, tenemos que incluir aquí, aun cuando sus disposiciones alcancen las superficiales, y entre ellas las pluviales. La unificación perseguida con insistencia nos permite igual concisión que antes. La palabra *usuarios* en vez de *terrenos* responde al propósito de incluir cualquier clase de aprovechamiento de las aguas.

Art. 2649. — Los dueños de los terrenos inferiores están sujetos a recibir las arenas y piedras que las aguas arrastren al escurrirse, sin que puedan reclamarlas los dueños de los terrenos superiores (art. 1579).

Se limita a generalizar los preceptos del código sin enumerar las aguas que producen los arrastres previstos.

Art. 3104. — El uso personal y discontinuo del agua de fuente, aljibe o pozo en predio ajeno, comprende el derecho de limpiarlos y de entrar a sacarla de día, salvo caso de urgente necesidad de noche. No importa privar al dueño sirviente de usarla para sí o acordar el mismo uso a otros, siempre que con ello no altere su pureza, ni disminuya su caudal, ni cause perjuicio al usufructuario en ésta u otra forma. Estas disposiciones rigen siempre que no se opongan a las impuestas al constituirse esta carga.

Totalmente suprimido el capítulo correlativo del código en el *Anteproyecto* y por la Comisión Reformadora, justificamos su incorporación aquí por tratarse, muy en especial, de aguas subterráneas. Esta obligación legal ofrece una garantía que la reglamentación flexible adapta al ambiente regional. Por razones de metodología corresponderá llevar esta disposición al título «del uso» para no conservar otras servidumbres que las prediales.

En materia de servidumbre de acueducto bastará suprimir en su articulado toda referencia a la clasificación de las aguas: con los pocos anteriores propuestos han quedado sometidas a idéntico régi-

men legal. El acueducto es uno: las aguas que corren en él no afectan su condición jurídica. Los textos apropiados para evitar las repeticiones numerosas del código corresponden, más propiamente, al estudio de las aguas superficiales y no a las subterráneas que nos ocupan aquí.

CONCLUSIÓN

Las escasas enmiendas introducidas en los artículos propuestos resuelven todo cuanto se refiere a las aguas subterráneas: su texto confirma, una vez más, la justificada y natural armonía que las hacemos conservar frente a las superficiales. En la legislación inflexible no hacen falta mayores preceptos. Las ordenanzas locales deben, en cambio, fijar los detalles para su búsqueda, explotación, zonas de reserva y conservación, en su mayor parte previstas en las pocas buenas existentes que reglamentan el uso y goce de las aguas superficiales y que sólo reclaman su modernización acertada, inspirada por la insustituible y preponderante influencia de la técnica hidráulica.

Buenos Aires, marzo de 1937.

FUNDAMENTOS MATEMATICOS DE LA MUSICA

POR A. E. SAGASTUME BERRA

(Conclusión *)

52.— Aunque los acordes que admitimos como consonantes en sentido estricto son solamente, como ya lo hemos dicho, los acordes mayores y menores, podemos sin embargo, basándonos en la teoría del bajo fundamental, dar un concepto de *consonancia relativa* que sirva para precisar la noción más o menos vaga que de ello se tiene.

Supongamos, para ello, un acorde cuyas notas originales pueden escribirse (§ 51) bajo la forma $\beta v_1, \beta v_2, \dots, \beta v_m$ (no excluimos el caso $m=1$, y entonces $v_1=1$). Aquí β es la frecuencia (absoluta) del bajo fundamental.

Cuando el bajo fundamental está cerca de las notas dadas, ello indica que éstas son armónicos relativamente bajos de aquél, y en consecuencia, el acorde es « consonante ». Viceversa, si los intervalos entre el bajo fundamental y las notas originales del acorde son grandes, éste es más o menos « disonante ». A consecuencia de esta observación, podemos entonces, para precisar los conceptos, definir primero la *altura relativa* l del acorde. Por definición, la altura relativa será la media geométrica de las frecuencias relativas del acorde o, lo que es lo mismo, la media geométrica de las frecuencias absolutas, dividida por la frecuencia del bajo fundamental:

$$l = \sqrt[m]{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_m} = \frac{\sqrt[m]{\beta v_1 \cdot \beta v_2 \cdot \dots \cdot \beta v_m}}{\beta} \quad [1]$$

La *altura absoluta* L del acorde será en cambio la media geométrica de las alturas absolutas de sus notas originales:

$$L = \sqrt[m]{\beta v_1 \cdot \beta v_2 \cdot \dots \cdot \beta v_m} = \beta \sqrt[m]{v_1 v_2 \cdot \dots \cdot v_m} = \beta l. \quad [2]$$

(*) Ver Tomo CXXIII y sig.

La magnitud

$$K = \log_2 \frac{L}{l} = \log_2 \beta \quad [3]$$

se llamará la *consonancia (relativa)* del acorde ⁽¹⁾.

Esta definición que tiende, como decimos, a precisar el concepto común de « consonancia » (relativa) de una nota o acorde, se justifica, no sólo por la observación puesta al principio de este párrafo (cuanto menor es l mayor es la « consonancia ») sino también por el hecho de que, a mayor altura (absoluta) de una nota o acorde, corresponde también mayor « consonancia »; pues según la [3], K depende no sólo de l , sino también de L .

Las alturas, relativa y absoluta, pueden ser también medidas en octavas, tomando los logaritmos de base 2. Sus respectivas medidas λ , Λ en este sistema serán, pues:

$$\lambda = \frac{1}{m} (\log_2 v_1 + \log_2 v_2 + \dots + \log_2 v_m) \quad [4]$$

$$\Lambda = \frac{1}{m} [\log_2 (\beta v_1) + \log_2 (\beta v_2) + \dots + \log_2 (\beta v_m)] = \log_2 \beta + \lambda, \quad [5]$$

de donde resulta también

$$K = \Lambda - \lambda. \quad [6]$$

Si trasladamos el acorde en un intervalo cualquiera α ($\alpha \leq 0$) medido en ω , ello equivale a multiplicar las frecuencias originales por 2^α . Entonces β también queda multiplicado por 2^α (§ 51), y por tanto, si l' , L' , λ' , Λ' , K' son las magnitudes análogas a l , L , λ , Λ , K para el nuevo acorde, se tendrá:

$$l' = l \quad ; \quad L' = 2^\alpha L \quad ; \quad \lambda' = \lambda \quad ; \quad \Lambda' = \alpha + \Lambda \quad ; \quad K' = \alpha + K.$$

En particular, la consonancia resulta aumentada en la magnitud constante α . Podemos, según ésto, reducirnos por ejemplo a estudiar los acordes formados en las inmediaciones de la normal de 435 vibraciones por segundo. El do bajo de esta octava (generalmente se lo llama do_3) resulta tener así la frecuencia $435 \times \frac{3}{5} = 261$, y el do alto (do_4), la frecuencia 522.

(1) Compárense estas definiciones con las de A. GUILLEMIN (VII).

Obsérvese que en el caso de una sola nota, la altura relativa es 1, y la absoluta coincide con la frecuencia. Por tanto, en este caso, la consonancia es simplemente el logaritmo (de base 2) de la frecuencia. Así por ejemplo, para el do_3 , la consonancia es:

$$K = \log_2 261 = 8,02790 .$$

Para el acorde mayor de una gama, como ya vimos (§ 51), las v_k son los números:

$$2^{E(\pi_r)}, 2^{E(\pi_r) - E(\pi_1)} \cdot p_1, 2^{E(\pi_r) - E(\pi_2)} \cdot p_2, \dots,$$

$$2^{E(\pi_r) - E(\pi_{r-1})} \cdot p_{r-1}, p_r .$$

Si hacemos coincidir la nota fundamental del acorde con el do_3 , tendremos entonces

$$2^{E(\pi_r)} \beta = 261 ,$$

de donde

$$\beta = 261.2^{-E(\pi_r)}$$

y

$$K_M = \log_2 261 - E(\pi_r) = 8,02790 - E(\log_2 p_r) , \quad [7]$$

fórmula que nos permite calcular la consonancia relativa de los diversos acordes mayores.

La medida en octavas de la altura relativa de este acorde será, según la [4]:

$$\lambda_M = \frac{1}{r+1} [\log_2 (2^{E(\pi_r)}) + \log_2 (2^{E(\pi_r) - E(\pi_1)} \cdot p_1) + \dots + \log_2 (2^{E(\pi_r) - E(\pi_k)} \cdot p_k) + \dots + \log_2 p_r] .$$

Pero el término $\log_2 (2^{E(\pi_r) - E(\pi_k)} \cdot p_k)$ es igual a $E(\pi_r) - E(\pi_k) + \log_2 p_k = E(\pi_r) - E(\pi_k) + \pi_k$. Luego:

$$\begin{aligned} \lambda_M = \frac{1}{r+1} [E(\pi_r) + E(\pi_r) - E(\pi_1) + \pi_1 + E(\pi_r) - E(\pi_2) + \\ \pi_2 + \dots + E(\pi_r) - E(\pi_{r-1}) + \pi_{r-1} + \pi_r] = E(\pi_r) + \\ + \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \dots + F(\pi_r)] \end{aligned} \quad [8]$$

Por tanto, la altura absoluta, medida en octavas, será (siendo do_3 la tónica) por las fórmulas [6,], [7] y [8]:

$$\Lambda_M = K_M + \lambda_M = \log_2 261 + \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \dots + F(\pi_r)]. \quad [9]$$

Las formulas [8] y [9], teniendo en cuenta que $F(\pi_k) = \gamma_{0, \dots, 1, \dots, 0}^{p_1, \dots, p_k, \dots, p_r}$ se pueden escribir también

$$\begin{aligned} \lambda_M = E(\pi_r) + \frac{1}{r+1} [\gamma_{1, 0, \dots, 0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \gamma_{0, 1, \dots, 0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \\ + \dots + \gamma_{0, 0, \dots, 1}^{p_1 p_2 \dots p_r}] \end{aligned} \quad [8']$$

$$\begin{aligned} \Lambda_M = \log_2 261 + \frac{1}{r+1} [\gamma_{1, 0, \dots, 0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \gamma_{0, 1, \dots, 0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \\ + \dots + \gamma_{0, 0, \dots, 1}^{p_1 p_2 \dots p_r}]. \end{aligned} \quad [9']$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_{0, 0, \dots, 0}^{p_1 p_2 \dots p_r} = 0$, se ve que el segundo término del último miembro de estas fórmulas no es sino el promedio aritmético de las notas del acorde mayor, expresadas en ω .

Análogamente podemos obtener las alturas relativa y absoluta y la consonancia de los acordes menores. Según el § 51, las v_k son en este caso

$$p_1 p_2 \dots p_r, 2^{E(\pi_1)} p_2 \dots p_r, 2^{E(\pi_2)} p_1 p_3 \dots p_r, \dots, 2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \dots p_{r-1}$$

Por lo tanto, si do_4 es la fundamental, se tiene

$$\beta p_1 p_2 \dots p_r = 522,$$

de donde

$$\beta = \frac{522}{p_1 p_2 \dots p_r}$$

y

$$\begin{aligned} K_m = \log_2 522 - (\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r) = 9,02790 - \\ - (\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r). \end{aligned}$$

Por otra parte, por la [4], será

$$\lambda_m = \frac{1}{r+1} [\log_2 (p_1 p_2 \dots p_r) + \log_2 (2^{E(\pi_1)} p_2 \dots p_r) + \dots + \log_2 (2^{E(\pi_k)} p_1 \dots p_{k-1} p_{k+1} \dots p_r) + \dots + \log_2 (2^{E(\pi_r)} p_1 p_2 \dots p_{r-1})]$$

El término

$$\log_2 (2^{E(\pi_k)} p_1 \dots p_{k-1} p_{k+1} \dots p_r)$$

se calcula así:

$$\begin{aligned} \log_2 (2^{E(\pi_k)} p_1 \dots p_{k-1} p_{k+1} \dots p_r) &= E(\pi_k) + \pi_1 + \dots + \pi_{k-1} + \\ &+ \pi_{k+1} + \dots + \pi_r = E(\pi_k) - \pi_k + (\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r), \end{aligned}$$

mientras que el primer término es simplemente $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r$. Esta suma aparece así repetida $r+1$ veces, y teniendo en cuenta además que $E(\pi_k) - \pi_k = -F(\pi_k)$, resulta:

$$\lambda_m = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r - \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \dots + F(\pi_r)]. \quad [11]$$

Por lo tanto,

$$\Lambda_m = K_m + \lambda_m = \log_2 522 - \frac{1}{r+1} [F(\pi_1) + F(\pi_2) + \dots + F(\pi_r)], \quad [12]$$

y estas dos fórmulas pueden escribirse también:

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_r - \frac{1}{r+1} [\gamma_{1,0,\dots,0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \gamma_{0,1,\dots,0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \\ &+ \dots + \gamma_{0,0,\dots,1}^{p_1 p_2 \dots p_r}] \end{aligned} \quad [11']$$

$$\begin{aligned} \Lambda_m &= \log_2 522 - \frac{1}{r+1} [\gamma_{1,0,\dots,0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \gamma_{0,1,\dots,0}^{p_1 p_2 \dots p_r} + \\ &+ \dots + \gamma_{0,0,\dots,1}^{p_1 p_2 \dots p_r}] \end{aligned} \quad [12']$$

Haciendo uso de estas fórmulas [3] a [12'], hemos calculado en la tabla siguiente los valores λ, Λ, K para algunos acordes entre los más comunes, especificando en cada caso la gama a que pertenecen.

A c o r d e	Gama	ν_k	λ	Λ	K
do ₃	cualquiera	1	0,00000	8,02790	8,02790
do ₃ -sol ₃	prim. ó Pit.	2, 3	1,29248	8,32038	7,02790
do ₃ -mi ₃ -sol ₃	Tol. ó Tol. cr.	4, 5, 6	2,30230	8,33020	6,02790
do ₃ -mi ₃ sol ₃ -te ₃	D. B.	4, 5, 6, 7	2,42856	8,45646	6,02790
do ₃ -mi ₃ fa ₃ # ₃ (?)-sol ₃ -te ₃	$\Gamma^{3,5,7,11}$	8, 10, 11, 12, 14	3,43473	8,26263	5,02790
do ₃ -mi ₃ fa ₃ # ₃ (?)-sol ₃ -la ₃ h ₃ (?)-te ₃	$\Gamma^{3,5,7,11,13}$	8, 10, 11, 12, 13, 14	3,47902	8,50692	5,02790
do ₄ -fa ₃	prim. ó Pit.	3, 2	1,29248	8,73542	7,44294
do ₄ -la ₃ h ₃ -fa ₃	Tol. ó Tol. cr.	15, 12, 10	3,60459	8,72560	5,12101
mi ₄ -do ₄ -la ₃ -sol ₃ h ₃ (*)	D. B.	105, 84, 70, 60	6,28568	8,92127	2,63559
do ₃ -mi ₃ -sol ₃ -si ₃ h ₃	Tol. cr.	36, 45, 54, 64	5,60417	8,46215	2,85798
cualquiera	at.	irracionales	∞	arbitr.	$-\infty$

Hemos incluido entre los «acordes», a una sola nota, el do₃ que es el punto de partida, para que sus valores de λ , Λ y K sirvan de comparación con los restantes. De acuerdo con esto vemos, por ejemplo, que para la altura absoluta del do₃, o sea 261 vibraciones por segundo, el máximo de consonancia está dado por el $\log_2 261 = 8,02790$; y en efecto, todos los demás acordes tienen una consonancia menor.

En la segunda sección del cuadro van una serie de acordes mayores de distintas gamas. Las notas seguidas de (?), por ejemplo fa₃#, (?), indican notas que no tiene equivalente exacto en nuestros sistemas actuales. Obsérvese cómo disminuye la consonancia al aumentar los armónicos generadores de la gama (como la altura absoluta Λ varía poco, esa disminución se debe al aumento de la altura relativa λ , o sea al alejamiento del bajo fundamental con respecto a las notas del acorde).

En la tercera sección del cuadro van los acordes menores. Como éstos se consideran engendrados en sentido inverso a los mayores, es decir, con la tónica como nota más alta, hemos tomado para ésta el do₄ en lugar del do₃, salvo el marcado con asterisco en la gama de Domínguez Berrueta, pues en ella no existe una nota [la llamaríamos *re*(?)] que completa el acorde menor do₄-la₃h₃-fa₃-re₃(?); en este caso hemos partido de la tónica mi₄. La consonancia de los acordes menores es más baja que la de los mayores, y ya el acorde menor tolemaico do₄-la₃h₃-fa₃ es muy poco más consonante que los

mayores de las gamas $\Gamma^{3,5,7,11}$ y $\Gamma^{3,5,7,11,13}$ que contienen armónicos elevados.

El acorde que figura en la cuarta sección es, entre los disonantes, uno de los más usados. Es un acorde de *séptima de dominante*, como se le llama, con respecto a la tonalidad de fa. Obsérvese su baja consonancia, apenas superior a la del acorde menor de Domínguez Berrueta. Para nosotros es uno de los acordes que hemos llamado imperfectos (véase § 42) y proviene del acorde mayor $\text{do}_3\text{-mi}_3\text{-sol}_3\text{-te}_3$ de la gama de Domínguez Berrueta, por sustitución de la nota te_3 por su más próxima tolemaica, $\text{si}\flat_3$. Nótese cuánto se pierde en el cambio.

Finalmente, en la quinta sección del cuadro tratamos el caso de la gama atemperada. Cualquier intervalo ($< 1\omega$) de esta gama es *irracional*, de la forma $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^\alpha$, donde $\alpha = 1, 2, \dots, 11$. No existiendo relaciones racionales entre las v_k , éstas pueden representarse solo aproximadamente por números enteros, y éstos crecen a medida que la aproximación es mayor. Con ellos sus logaritmos, y por tanto λ , crecen indefinidamente. De ahí el valor-límite ∞ que hemos indicado para λ . La altura absoluta Λ puede ser arbitraria, pero en cualquier caso la consonancia K tiene, por la [6], el valor-límite $-\infty$. En este ejemplo se ve claramente la notable diferencia entre una gama « natural », como la de Tolomeo o Domínguez Berrueta, y la gama atemperada « artificialmente » (aún admitiendo que los valores de K no correspondan sino groseramente a lo que entendemos intuitivamente por « consonancia »).

53. — Supongamos tener dos acordes A' , A'' , de frecuencias $\beta'v'_1, \beta'v'_2, \dots, \beta'v'_{m'}$ el primero, $\beta''v''_1, \beta''v''_2, \dots, \beta''v''_{m''}$ el segundo; por lo tanto, los frecuencias de los bajos fundamentales son β' , β'' . Tomando en conjunto todas estas $m' + m''$ notas, se forma otro acorde A cuyas alturas λ , Λ y bajo fundamental β queremos hallar, suponiendo conocidas las magnitudes análogas λ' , Λ' , β' ; λ'' , Λ'' , β'' relativas a los acordes dados.

Por la misma definición del bajo fundamental β , éste debe ser el máximo común divisor de todas las frecuencias dadas. Este máximo común divisor puede hallarse así: hallemos primero el m. c. d. de las frecuencias de A' , con lo que obtenemos β' ; por separado el m. c. d. de las frecuencias de A'' , que es β'' ; y luego, el m. c. d. de estos dos números. Resulta entonces que β es simplemente el m. c. d. de β' , β'' . El máximo común divisor de dos números a, b suele indicarse con (a, b) . Así pues, se tiene:

$$\beta = (\beta', \beta''). \quad [13]$$

Ahora bien: el m. c. d. de dos números es una función lineal (y homogénea) de ellos; y por otra parte, es naturalmente submúltiplo de esos mismos números. Por tanto, la [13] equivale a decir que existen cuatro números enteros a' , a'' , k' k'' (los dos últimos positivos) tales que:

$$\beta = a'\beta' + a''\beta'' \quad [14]$$

$$\beta' = k'\beta \quad ; \quad \beta'' = k''\beta. \quad [15]$$

La altura absoluta Λ es también una función lineal homogénea de Λ' , Λ'' . En efecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{m' + m''} [\log_2 (\beta' v'_1) + \dots + \log_2 (\beta' v'_{m'}) + \log_2 (\beta'' v''_1) + \\ &+ \dots + \log_2 (\beta'' v''_{m'')}] = \frac{m'}{m' + m''} \frac{\log_2 (\beta' v'_1) + \dots + \log_2 (\beta' v'_{m'})}{m'} + \\ &+ \frac{m''}{m' + m''} \frac{\log_2 (\beta'' v''_1) + \dots + \log_2 (\beta'' v''_{m'')}}{m''} \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta la definición de Λ' , Λ'' [fórmula (5)]:

$$\Lambda = \frac{1}{m' + m''} (m' \Lambda' + m'' \Lambda''), \quad [16]$$

lo que prueba la afirmación. Λ resulta ser una *media ponderal* de Λ' , Λ'' , con los *pesos* m' , m'' , respectivamente.

Para calcular λ , hay que tener en cuenta que el único factor común a todas las frecuencias del acorde total A es β , y que esas frecuencias pueden expresarse, por las [15], en la forma: $\beta.k'v'_1, \dots, \beta.k'v'_{m'}, \beta.k''v''_1, \dots, \beta.k''v''_{m''}$. Luego las v_i para el acorde total A son ahora los números: $k'v'_1, k'v'_2, \dots, k'v'_{m'}, k''v''_1, \dots, k''v''_{m''}$, cuyo promedio logarítmico, según la [4], es λ . Es decir:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{m' + m''} [\log_2 (k' v'_1) + \dots + \log_2 (k' v'_{m'}) + \log_2 (k'' v''_1) + \\ &+ \dots + \log_2 (k'' v''_{m'')}] = \frac{1}{m' + m''} [m' \log_2 k' + \log_2 v'_1 + \dots + \\ &+ \log_2 v'_{m'} + m'' \log_2 k'' + \log_2 v''_1 + \dots + \log_2 v''_{m'']}] , \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que, por la [4], $\log_2 v'_1 + \dots + \log_2 v'_{m'} = m' \lambda'$, y análogamente para λ'' , resulta finalmente:

$$\lambda = \frac{1}{m' + m''} [m' (\lambda' + \log_2 k') + m'' (\lambda'' + \log_2 k'')] \quad [17]$$

La [17] nos dice que también λ es una función lineal (no homogénea) de λ' , λ'' . Si consideramos por un instante como altura relativa *ficticia* del primer acorde, a la magnitud $\lambda' + \log_2 k'$, y análogamente, $\lambda'' + \log_2 k''$ para el acorde A'' , la [17] nos dice que λ es la media ponderal, con pesos m' , m'' , de esas alturas ficticias.

Estas consideraciones pueden ser útiles para calcular la altura relativa, o el bajo fundamental, de acordes complejos. Por ejemplo, vamos a calcular por este procedimiento λ y β para el acorde de séptima dominante que aparece en la tabla final de § anterior. El acorde A está formado por la superposición del acorde A' : $\text{do}_3\text{-mi}_3\text{-sol}_3$, y del « acorde » de una sola nota A'' : si_b3 . Para el primero, se tiene $m' = 3$ (número de notas), $v'_1 = 4$, $v'_2 = 5$, $v'_3 = 6$, y $\beta' = \frac{261}{4} = 65,25$ o, adoptando como unidad de tiempo el cuádruple segundo, $\beta' = 65,25 \times 4 = 261$. El valor de λ' , que no depende de la altura absoluta, es el dado por la tabla, o sea $\lambda' = 2,30230$. Para el acorde A'' , es $m'' = 1$, $v''_1 = 1$, y $\lambda'' = 0$. En cambio β'' es $\frac{261 \times 64}{36} = 464$, o, adoptando la misma unidad de tiempo, $\beta'' = 464 \times 4 = 1856$. Siendo

$$261 = 9 \times 29 \quad ; \quad 1856 = 64 \times 29$$

y 9 y 64 primos entre sí, se tendrá $k' = 9$, $k'' = 64$, el m. c. d. de β' , β'' será 29 y, volviendo al segundo como unidad de tiempo, $\beta = \frac{29}{4} = 7,25$, de donde

$$K = \log_2 7,25 = \log_2 \frac{29}{4} = 4,85798 - 2 = 2,85798 ,$$

en concordancia con el valor de la tabla. Aplicando ahora la [17], será:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{1}{4} [3 (2,30230 + \log_2 9) + 1 (0 + \log_2 64)] = \\ &= \frac{1}{4} [3 (2,30230 + 3,16992) + 1 \times 6] = 5,60416 ,\end{aligned}$$

también de acuerdo con la tabla (el error en la última cifra no tiene importancia, y se elimina usando más cifras decimales en los logaritmos).

Resumiendo los resultados de este §, podemos enunciar el teorema:

Superponiendo dos acordes A' , A'' , se obtiene un acorde compuesto A , cuyo bajo fundamental y alturas absoluta y relativa son funciones lineales (y las dos primeras homogéneas) de las correspondientes magnitudes para los acordes A' , A'' . En particular: el bajo fundamental β es el máximo común divisor de los bajos fundamentales β' , β'' de los acordes dados.

Esta última proposición puede enunciarse también, en forma más útil para nuestro objeto, así: *el bajo fundamental β de un acorde A , compuesto de los acordes A' , A'' , coincide con el bajo fundamental del acorde de dos notas formado por los bajos fundamentales β' , β'' de los acordes componentes.*

Pues si consideramos el acorde formado por las notas β' , β'' , su bajo fundamental es el m. c. d. de estos números, es decir, β .

54. — Si queremos, pues, estudiar con respecto a su consonancia tales acordes *compuestos* mediante otros dos, convendrá considerar previamente los acordes de dos notas formados por los bajos fundamentales.

Como la altura absoluta, para este efecto, es arbitraria, podemos hacer coincidir uno de los bajos fundamentales, por ejemplo β' , con el do_3 de 261 vibraciones por segundo. Estudiaremos, pues, los acordes de dos notas formados por este do_3 y otra nota cualquiera, dentro de las distintas gamas que hemos dado en los capítulos III y IV.

Comencemos por la gama pitagórica, o sea la $\Gamma^3_{(0,11)}$, que consta de las notas fa, do, sol, re, la, mi, si, fa#, do#, sol#, re#, la#, engendradas por quintas sucesivas (véase §§ 22, 23), de modo que cada nota se obtiene de la anterior multiplicando su frecuencia por 3 y reduciendo a la octava. Si tomamos para el do_3 la frecuencia (relativa) 1, esas notas, en el orden escrito, tienen las frecuencias:

$$\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \frac{243}{128}, \frac{729}{512}, \frac{2187}{2048}, \frac{6561}{4096}, \frac{19683}{16384}, \frac{59049}{32768} .$$

Para el acorde $\text{do}_3\text{-fa}_3$, las frecuencias relativas son, pues, 1 y $\frac{4}{3}$, ó 3 y 4 . El bajo fundamental es 1 (pues esas frecuencias son primas entre sí) y representa un fa dos octavas más bajo que el original, o sea fa_1 (el subíndice, ya sea positivo, cero o negativo, indica la octava a que pertenece la nota, contada de do a si , y considerando como octava 3 la que contiene el la normal de 435 vibraciones por segundo, o para nuestro caso, la que comienza con el do de frecuencia 261). El bajo fundamental será la frecuencia absoluta de este fa_1 , o sea $\beta = 261 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2^2} = 87$. Aquí 261 es la frecuencia del do_3 ; multiplicándola por $\frac{4}{3}$ tendremos la del fa_3 , y bajando dos octavas, o sea multiplicando por $\frac{1}{2^2}$, tendremos la del fa_1 , que es el bajo fundamental. Teniendo en cuenta la fórmula [3] obtenemos la consonancia: $K = \log_2 87 = 6,44294$.

Con el acorde $\text{do}_3\text{-sol}_3$ operamos análogamente: las frecuencias relativas son 2 y 3 . Bajo fundamental, do_2 , de frecuencia $\beta = \frac{261}{2} = 130,5$. Consonancia $K = \log_2 130,5 = 7,02790$. Y así seguiríamos con las demás notas pitagóricas, obteniendo finalmente la siguiente tabla:

Gama pitagórica					
Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
$\text{do}_3 - \text{fa}_3$	fa_1	6,44294	$\text{do} - \text{fa}\#_3$	do_{-6}	-0,97210
» - sol_3	do_2	7,02790	» - $\text{do}\#_3$	do_{-8}	-2,97210
» - re_3	do_0	5,02790	» - $\text{sol}\#_3$	do_{-9}	-3,97210
» - la_3	do_{-1}	4,02790	» - $\text{re}\#_3$	do_{-11}	-5,97210
» - mi_3	do_{-3}	2,02790	» - $\text{la}\#_3$	do_{-12}	-6,97210
» - si_3	do_{-4}	1,02790			

Para la gama tolemaica cromática, debemos tener en cuenta ante todo que las frecuencias relativas (tomando el do_3 como unidad), según los §§ 25 y 26, son:

$$\frac{32}{25}, \frac{48}{25}, \frac{36}{25}, \frac{27}{25}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{15}{8},$$

$$\frac{25}{18}, \frac{25}{24}, \frac{25}{16}, \frac{75}{64}, \frac{125}{72}, \frac{125}{96}, \frac{125}{64},$$

correspondiendo, respectivamente, a las notas:

$fa\flat_3, do\flat_3, sol\flat_3, re\flat_3, la\flat_3, mi\flat_3, si\flat_3, fa_3, do_3, sol_3, re_3, la_3, mi_3, si_3,$

$fa\sharp_3, do\sharp_3, sol\sharp_3, re\sharp_3, la\sharp_3, mi\sharp_3, si\sharp_3.$

Efectuando cálculos análogos a los del caso anterior, obtendremos ahora el cuadro siguiente:

Gama tolemaica cromática					
Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
$do_3 - fa\flat_3$	$fa\flat_{-2}$	3,38405	$do_3 - la_3$	fa_1	6,44294
» - $do\flat_3$	$fa\flat_{-2}$	3,38405	» - mi_3	do_1	6,02790
» - $sol\flat_3$	$fa\flat_{-2}$	3,38405	» - si_3	do_0	5,02790
» - $re\flat_3$	$fa\flat_{-2}$	3,38405	» - $fa\sharp_3$	$si\flat_{-2} (?)$	3,85798
» - $la\flat_3$	$la\flat_0$	5,70598	» - $do\sharp_3$	fa_{-2}	3,44294
» - $mi\flat_3$	$la\flat_0$	5,70598	» - $sol\sharp_3$	do_{-1}	4,02790
» - $si\flat_3$	$la\flat_0$	5,70598	» - $re\sharp_3$	do_{-3}	2,02790
» - fa_3	fa_1	6,44294	» - $la\sharp_3$	$si\flat_{-4} (?)$	1,85798
» - sol_3	do_2	7,02790	» - $mi\sharp_3$	fa_{-4}	1,44294
» - re_3	do_0	5,02790	» - $si\sharp_3$	do_{-3}	2,02790

Obsérvese que, en conjunto, esta gama presenta mayores consonancias que la pitagórica.

Mayores aún serán esas consonancias para la gama de Domínguez Berrueta, que vamos a estudiar ahora. Su frecuencias relativas (§ 33) son:

$$\frac{10}{7}, \frac{15}{14}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, \frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{15}{8}, \frac{7}{5}, \frac{21}{20}, \frac{14}{9}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}.$$

para las notas, respectivamente:

$sol\flat_3, re\flat_3, la\flat_3, mi\flat_3, si\flat_3, fa_3, do_3, sol_3, re_3, la_3, mi_3, si_3,$

$fa\sharp_3, do\sharp_3, sol\sharp_3, re\sharp_3, te_3.$

Con estos datos construiremos ahora la tabla correspondiente, que es:

Gama de Domínguez Berrueta					
Acorde	Bajo fund.	K	Acorde	Bajo fund.	K
do ₃ - sol ₃	mi ₃ h ₀ (?)	5,22055	do ₃ - la ₃	fa ₁	6,44294
» - re ₃	mi ₃ h ₋₁ (?)	4,22055	» - mi ₃	do ₁	6,02790
» - la ₃	la ₀	5,70598	» - si ₃	do ₀	5,02790
» - mi ₃	la ₀	5,70598	» - fa ₃ #	la ₀	5,70598
» - si ₃	la ₀	5,70598	» - do ₃ #	la ₀ - ₂	3,70598
» - fa ₃	fa ₁	6,44294	» - sol ₃ #	si ₀ - ₁ (?)	4,85798
» - sol ₃	do ₂	7,02790	» - re ₃ #	fa ₀	5,44294
» - re ₃	do ₀	5,02790	» - te ₃	do ₁	6,02790

En esta tabla y la anterior, los bajos indicados con (?) [por ejemplo, si₀-₂ (?)] indican, como de costumbre, notas que no pertenecen a la gama respectiva, pero que se aproximan a ella.

Se observa en todos los casos un máximo de consonancia para el acorde do₃-sol₃, y el valor inmediatamente inferior a éste corresponde, también en todos los casos, al acorde do₃-fa₃.

55. — Estos hechos pueden ser tratados en general, de la siguiente manera: sea un acorde de dos notas do₃-c, donde c indica una nota de la octava 3ª perteneciente a la $\Gamma_{\frac{p}{q}}^{p_1 \dots p_r}$ atemperada que consideramos. Si asignamos la frecuencia 1 al do₃, a la nota c corresponderá una frecuencia fraccionaria, comprendida entre 1 y 2 (incluido el extremo inferior) y el numerador y denominador de esa fracción no podrán admitir otros factores primos que 2 y los p₁, ..., p_r, generadores de la gama. Se puede escribir, pues:

$$c = \frac{2^{n_0} \cdot p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}}{2^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}} \quad [18]$$

donde los números n₀, ..., n_r ; m₀, ..., m_r son enteros, positivos o nulos.

Si suponemos ya simplificada la fracción, de modo que no haya factores comunes al numerador y al denominador, ello significa que si un exponente n_i por ejemplo, es positivo, su correspondiente m_i debe ser nulo (en caso contrario podríamos aún simplificar uno o más factores p_i) y viceversa; sin que esto excluya el caso, también

posible, de que simultáneamente sea $n_i = m_i = 0$. Esta condición que imponemos (evidentemente sin menoscabo de la generalidad) a los números n_i, m_i puede expresarse brevemente diciendo que su producto $n_i m_i$ ha de ser nulo en todos los casos:

$$n_i m_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r) \quad [19]$$

Por otra parte, como hemos dicho, la fracción [18] debe estar comprendida entre 1 y 2, lo que da:

$$2^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \leq 2^{n_0} \cdot p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} < 2^{m_0+1} \cdot p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r},$$

condición que utilizaremos bajo la forma logarítmica, es decir, tomando los logaritmos de base 2 de los tres miembros; teniendo en cuenta que $\log_2 p_i = \pi_i$, se tiene:

$$\begin{aligned} m_0 + m_1 \pi_1 + \dots + m_r \pi_r &\leq n_0 + n_1 \pi_1 + \dots + n_r \pi_r < \\ &< m_0 + m_1 \pi_1 + \dots + m_r \pi_r + 1, \end{aligned}$$

lo cual, si escribimos:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m &= m_0 + m_1 \pi_1 + \dots + m_r \pi_r \\ \varphi_n &= n_0 + n_1 \pi_1 + \dots + n_r \pi_r, \end{aligned} \right\} \quad [20]$$

queda en la forma:

$$\varphi_m \leq \varphi_n < \varphi_m + 1. \quad [21]$$

Las notas de nuestro acorde tienen las frecuencias relativas 1 y c , o, por la [18] $2^{m_0} p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ y $2^{n_0} p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$, y estos números son primos entre sí. En virtud de esta circunstancia, el bajo fundamental estará representado, con el mismo factor de proporcionalidad, por la frecuencia relativa 1, y por tanto la frecuencia absoluta

$$\beta = \frac{261}{2^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}}$$

(pues el do_3 , de frecuencia absoluta 261, tiene la frecuencia relativa $2^{m_0} \cdot p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$). De aquí resulta, tomando logaritmos de base 2 y recordando la fórmula [3]:

$$K = \log_2 261 - m_0 - m_1 \pi_1 - \dots - m_r \pi_r,$$

o sea, por la [20] :

$$K = \log_2 261 - \varphi_m = 8,02790 - \varphi_m .$$

La función φ_m (y con ella la consonancia K), por depender de las variables enteras $m_0, m_1, \dots, m_r$, solo toma una sucesión discreta de valores. Como K y φ_m varían en sentidos opuestos, convendrá estudiar la función φ_m a partir de su valor mínimo, para ir obteniendo así los valores de K que sean mayores, que son los que más nos interesan.

El mínimo absoluto de φ_m es 0, valor que se obtiene cuando todas las m_i son nulas. En este caso, por la [21], φ_n está comprendido entre 0 y 1, incluído el extremo inferior 0; y como todas las π_i son mayores que 1, es para ello forzoso que sea $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$, con lo que la ecuación [21] queda reducida a

$$0 \leq n_0 < 1 ,$$

de donde resulta $n_0 = 0$; por la [18] es entonces $c = 1$, y recaemos en el do_3 . Naturalmente, el acorde reducido a una sola nota presenta, como ya observamos, la máxima consonancia posible.

En general, la ecuación [21] puede también escribirse

$$0 \leq \varphi_n - \varphi_m < 1 ,$$

y observando que $\varphi_n - \varphi_m$ es otra función del mismo tipo, solo que las variables son ahora $n_0 - m_0, n_1 - m_1, \dots, n_r - m_r$ (y *pueden tomar valores negativos*) y por tanto podemos indicar a esa función con la notación φ_{n-m} , o bien φ_h , si ponemos:

$$h_i = n_i - m_i \quad (i = 0, 1, \dots, r) , \quad [23]$$

queda

$$0 \leq \varphi_h < 1 . \quad [21']$$

Dado un cierto valor de φ_m , que corresponde biunívocamente a un sistema de valores de $m_0, m_1, \dots, m_r$, queda fijado un valor de la consonancia K . Las ecuaciones [21'], [23] y la condición [19] nos permiten entonces determinar un número finito de sistemas de valores $n_0, n_1, \dots, n_r$ de tal manera que los acordes $\text{do}_3 - c$ correspondientes presenten esa consonancia. En efecto, si una m_i es distinta de

cero, en virtud de [19] debe ser $n_i = 0$, y por la [23], $h_i = -m_i < 0$. En cambio si $m_i = 0$, pudiendo n_i tomar cualquier valor, resulta $h_i = n_i \geq 0$. Pero es claro que basta con que se sepa cuáles de las h_i deben ser negativas (debe haber, excluyendo el caso del acorde de una sola nota, al menos una $m_i \neq 0$) para limitar las posibilidades, reduciéndolas a un número finito.

Consideremos, por ejemplo, el caso (el más importante) en que $p_1, p_2, \dots, p_r$ coincidan con los números primos sucesivos 3, 5, 7, 11, ... sin faltar ninguno, o que por lo menos, sea $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$. Entonces $\pi_1 = 1,58$ (no necesitamos más que dos cifras decimales), $\pi_2 = 2,32$, $\pi_3 = 2,81$, etc. Por tanto

$$\varphi_m = m_0 + 1,58 m_1 + 2,32 m_2 + 2,81 m_3 + \dots + \pi_r m_r,$$

expresión que, sustituyendo las m_i por las h_i , nos da φ_h .

a) Evidentemente, excluido el valor 0, φ_m no puede tomar un valor menor que 1, el cual corresponde a $m_0 = 1$, $m_1 = m_2 = \dots = m_r = 0$. Entonces la ecuación [21'] se transforma en:

$$0 \leq h_0 + 1,58 h_1 + 2,32 h_2 + \dots + \pi_r h_r < 1,$$

con $h_0 = -1$, $h_i \geq 0$ para $i > 0$. Es claro que ninguna de las h_i para $i \geq 2$ puede ser positiva, pues ya φ_h resultaría mayor que 1. Luego $h_2 = h_3 = \dots = h_r = 0$, y la ecuación se convierte en:

$$0 \leq 1,58 h_1 - 1 < 1,$$

de donde la única solución $h_1 = 1$. Por la [23] se tiene entonces:

$$n_0 = 0, \quad n_1 = h_1 = 1, \quad n_2 = \dots = n_r = 0,$$

y la nota c , por la [18], es $\frac{3}{2}$, o sea el sol₃.

b) El valor inmediato de φ_m superior a 1 es 1,58, para $m_0 = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = \dots = m_r = 0$. Entonces $h_1 = -1$, $h_i \geq 0$ para $i \neq 1$ y la [21'] da:

$$0 \leq h_0 - 1,58 + 2,32 h_2 + \dots + \pi_r h_r < 1,$$

Para $h_0 \geq 3$ no hay solución, pues φ_h resulta $\geq 1,42$. Para $h_0 = 2$ se tiene la solución $h_2 = \dots = h_r = 0$. Para $h_0 = 1$ nuevamente no hay solución, pues $\varphi_h = -0,58 + 2,32 h_2 + \dots + \pi_r h_r$, que no puede estar comprendido entre 0 y 1; para $h_0 = 0$, existe la solución $h_2 = 1$, $h_3 = \dots = h_r = 0$; y no hay más soluciones. Los valores de las n_i son, en el primer caso, $n_0 = 2$, $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$ y en el segundo, $n_2 = 1$, $n_0 = n_1 = n_3 = \dots = n_r = 0$, que corresponden, respectivamente, a $c = \frac{4}{3}$ o sea el fa_3 , y $c = \frac{5}{3}$, el la_3 tolemaico.

c) Inmediatamente al valor 1,58, tendremos para φ_m el valor 2,32, para $m_0 = m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = \dots = m_r = 0$. Entonces $h_2 = -1$, y las demás $h_i \geq 0$, de modo que la [21'] es:

$$0 \leq h_0 + 1,58 h_1 - 2,32 + 2,81 h_3 + \dots + n_r h_r < 1.$$

Como $p_4 \geq 11$, es $\pi_4 \geq 3,46$ (pues $\log_2 11 = 3,46$) y con mayor razón $\pi_5, \dots, \pi_r$ serán todos números mayores que 3,46. Por consiguiente, es necesario, para que la condición anterior se verifique, que $h_4 = h_5 = \dots = h_r = 0$, y queda entonces

$$0 \leq h_0 + 1,58 h_1 - 2,32 + 2,81 h_3 < 1.$$

Para $h_0 \geq 4$ no hay soluciones, lo mismo que para $h_0 = 2$. Para $h_0 = 3$, tenemos la solución $h_1 = h_3 = 0$. Para $h_0 = 1$, tenemos la posibilidad $h_1 = 1$, $h_3 = 0$; y para $h_0 = 0$ hay dos soluciones: $h_1 = 0$, $h_3 = 1$, y $h_1 = 2$, $h_3 = 0$.

Las únicas soluciones para este valor de φ_m , es decir para $m_0 = m_1 = m_3 = \dots = m_r = 0$, $m_2 = 1$ son, pues:

$$h_0 = 3, h_1 = 0, h_2 = -1, h_3 = h_4 = \dots = h_r = 0;$$

luego

$$n_0 = 3, n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_r = 0; c = \frac{8}{5}, \text{ la}_3 \text{ (Tol. cr.) o (D.B.)}$$

$$h_0 = 1 = h_1, h_2 = -1, h_3 = h_4 = \dots = h_r = 0;$$

luego

$$n_0 = 1 = n_1, n_2 = n_3 = \dots = n_r = 0; c = \frac{6}{5}, \text{ mi}_3 \text{ (Tol. cr.) o (D.B.)}$$

$$h_0 = 0 = h_1, h_2 = -1, h_3 = 1, h_4 = \dots = h_r = 0;$$

luego

$$n_0 = 0 = n_1 = n_2, n_3 = 1, n_4 = \dots = n_r = 0; c = \frac{7}{5}, \text{fa}\sharp_3 \text{ (D. B.)}$$

$$h_0 = 0, h_1 = 2, h_2 = -1, h_3 = h_4 = \dots h_r = 0;$$

luego

$$n_0 = 0, n_1 = 2, n_2 = n_3 = \dots = n_r = 0; c = \frac{9}{5}, \text{si}\flat_3 \text{ (Tol.cr.) o (D.B.)}$$

Y así podríamos continuar: para cada *nivel* de la función φ_m hay un número finito de notas c tales que el acorde do_3c presenta la misma consonancia, dada por la fórmula [22]; y estas consonancias van disminuyendo a medida que aumentan los valores de φ_m .

Nótese que, en el caso *a*), la única hipótesis realmente necesaria es que en la $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ sea $p_1 = 3$, pues entonces $p_2 \geq 5$, y $\pi_2 \geq \log_2 5 = 2,32$, y valen todas las conclusiones obtenidas. Análogamente, en el caso *b*), todas las conclusiones son válidas con la sola hipótesis que sea $p_1 = 3, p_2 = 5$; y en el caso *c*), con la hipótesis $p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7$. Los demás armónicos podrán ser arbitrarios.

Si llamamos *tónica* a la nota do_3 que nos ha servido de punto de partida, y que es la que corresponde a la consonancia máxima c al nivel 0 de φ_m , podremos llamar *dominantes primeras* a las notas que corresponden al nivel siguiente de φ_m , o sea al nivel 1, *dominantes segundas* ⁽¹⁾ a las del nivel siguiente [en el caso *b*), o sea para $p_1 = 3, p_2 = 5$, este nivel es 1,58]; luego vendrán las *dominantes terceras, cuartas*, etc., cada vez más alejadas armónicamente de la nota fundamental o tónica. La primera dominante (única) en el caso $p_1 = 3$, o sea el sol, se suele llamar simplemente *dominante*; y en cambio se llama *subdominante* a una de las dominantes segundas, el fa (en las gamas que contengan el armónico $p_1 = 3$).

Naturalmente, las consideraciones anteriores pueden aplicarse a cualquier otra nota de la gama, y cualquiera sea su altura absoluta; lo único necesario entonces para que sigan valiendo las conclusiones,

(1) Esta acepción difiere de la que se usa algunas veces. Los músicos suelen llamar *segunda dominante* a la dominante de la dominante. Así, si la tónica es do, su dominante sol, la segunda dominante sería la dominante de sol, o sea re. En cambio en nuestra denominación, y en la gama tolemaica por ejemplo, las segundas dominantes son fa y la.

es trasladar en un mismo intervalo todas las notas de que se trata. Así por ejemplo, si tomamos como tónica el *re* (*Pit.*) en cualquier octava, en lugar del sol su dominante 1ª sería el la (*Pit.*), que corresponde al intervalo $\frac{3}{2}$, si el re es la unidad. Nótese que pueden aparecer así *dominantes que no pertenezcan a la gama atemperada*; por ejemplo, si tomamos como tónica el re (*Tol. cr.*), su primera dominante sería una nota a intervalo $\frac{3}{2}$ con respecto a ella. Reduciéndonos como de costumbre al do como unidad, el re (*Tol. cr.*) tiene la altura $\frac{9}{8}$, y su dominante, la altura $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, que no es el la (*Tol. cr.*) ni ninguna otra nota de la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$. Esta nota difiere de la (*Tol. cr.*) (que es $\frac{5}{3}$) en el intervalo $\frac{27}{16} \div \frac{5}{3} = \frac{81}{80}$ que no es sino una coma sintónica. Análogamente, si calculáramos por el procedimiento anterior las quintas dominantes de do en la gama de Domínguez Berrueta, obtendremos una sola, $\frac{10}{7}$, que es el sol♯ (*D. B.*), mientras que las otras, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$ y $\frac{12}{7}$, no pertenecen a esa gama.

56.—Volvamos ahora a los acordes. Ya vimos (§ 53) que un acorde *A*, compuesto mediante la superposición de dos acordes *A'*, *A''*, tiene como bajo fundamental, el bajo fundamental del acorde (de dos notas) formado por los bajos fundamentales de los acordes *A'*, *A''*. Ello nos condujo a estudiar con cierto detenimiento esos acordes de dos notas, clasificando su consonancia, con lo que hemos llegado a clasificar todas las notas de una gama atemperada cualquiera, con respecto a una nota fundamental o tónica, en una serie de *niveles*, de tal modo que a cada nivel pertenece una o más notas que, junto con la tónica, dan acordes igualmente consonantes. A estos niveles, o mejor dicho, a las notas que se encuentran en cada uno, las hemos llamado, según su importancia armónica o sea según su consonancia con la tónica, *primeras*, *segundas*, *terceras*,... *dominantes* de ésta.

Partamos ahora de un acorde mayor cualquiera, por ejemplo el que tiene como fundamental o tónica la nota do. Su bajo fundamental es también un do, situado (§ 51) un cierto número de octavas debajo de la tónica. Consideremos ahora las dominantes 1ªs, 2ªs, etc. hasta un cierto orden determinado *k*, de esa nota do, y los

acordes mayores que tienen como bajos fundamentales esas dominantes. En virtud del mismo teorema citado del § 51, esos acordes serán aquellos que tienen como notas fundamentales las homónimas, solo que elevadas nuevamente a la octava original a que pertenece la tónica. Esos acordes se llamarán *acordes de 1ª, 2ª, ..., k-ésima dominante* relativos a la tónica do, o a la *tonalidad*, o *tono*, de *do mayor*. Son, por su misma definición, los acordes que presentan mayor afinidad armónica con el acorde de tónica.

Tomemos ahora en conjunto, todas las notas que pertenecen a todos esos acordes (incluso el de tónica): las llamaremos *notas diatónicas* pertenecientes a la tonalidad; a las demás notas existentes en la gama atemperada, las llamaremos *notas cromáticas*; y diremos que las notas diatónicas constituyen la *escala* o *gama melódica* (mayor), dentro de la gama total atemperada, a la que podremos llamar ahora, para diferenciarla, *gama armónica*. La gama melódica está, pues, constituida solamente por las notas diatónicas; y la gama armónica, por éstas y las cromáticas. Bien entendido que esta definición se refiere esencialmente a una tónica o tonalidad, y a un cierto orden k de las dominantes cuya afinidad con la tónica consideramos como admisible o aceptable.

La importancia del concepto de notas diatónicas está en lo siguiente: si construimos una *melodía* o sucesión de notas utilizando exclusivamente la gama melódica, es claro que cada una de esas notas, y por tanto, toda la melodía, podrá *armonizarse* o acompañarse con uno (al menos) de los acordes de tónica o dominantes hasta el orden k , es decir, precisamente aquellos acordes que hemos aceptado como más afines al de tónica.

Las mismas consideraciones que hemos hecho para las tonalidades mayores pueden aplicarse también a las *tonalidades menores*, a saber: si partimos de un acorde menor (de *tónica*), podemos considerar su bajo fundamental, las dominantes 1ª, 2ª, ..., k -ésima de ese bajo, y los acordes menores que tienen como bajos fundamentales esas notas. Las notas de todos esos acordes en conjunto forman la *gama melódica menor* de esa tonalidad, las demás notas, no *diatónicas*, son las *cromáticas*. Una melodía que conste solo de notas diatónicas podrá armonizarse con los acordes que hemos considerado. La única diferencia está en que ahora la nota del bajo fundamental no es homónima con la fundamental de cada acorde, como en el caso mayor, pero aparte de eso, todo lo dicho se mantiene aplicable.

Para cada tonalidad (ya sea mayor o menor) se suelen considerar solo las que llamaremos *dominantes principales* de los distintos ór-

denes. Una dominante principal de k -ésimo orden ($k = 1, 2, \dots$) de una $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ es una dominante de k -ésimo orden común a todas las $\Gamma_{\Phi}^{p_1}, \Gamma_{\Phi}^{p_1 p_2}, \dots, \Gamma_{\Phi}^{p_1 p_2 \dots p_r}$ contenidas en la gama dada. Toda dominante principal de k -ésimo orden pertenece, pues, en el mismo carácter, a la $\Gamma_{\Phi}^{p_1}$ contenida en $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ (recuérdese que p_1 es el armónico más bajo); pero recíprocamente, toda dominante k -ésima de $\Gamma_{\Phi}^{p_1}$ es también una dominante k -ésima de $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$. En efecto, si esa dominante corresponde (ver § anterior) a un cierto nivel $\varphi_m = m_0 + m_1 \pi$ de la función φ_m relativa a $\Gamma_{\Phi}^{p_1}$, se ve fácilmente que ese mismo nivel puede obtenerse para la φ_m $m_0 + m_1 \pi_1 + \dots + m_r \pi_r$, con el mismo número de orden k (tomando $m_2 = \dots = m_r = 0$) con lo que se obtiene la misma dominante para $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$.

Por otra parte, toda $\Gamma_{\Phi}^{p_1}$ admite a lo sumo una dominante de cada orden, pues la ecuación [21'] con las condiciones [19] y [23] es en este caso

$$0 \leq h_0 + h_1 \pi_1 < 1$$

en la cual por lo menos una de las h_i es un número conocido y negativo. Si las dos h_i están en estas condiciones (o sea, si $m_0, m_1 \neq 0$), esta ecuación no tiene solución, mientras que si una de las h_i es incógnita, o no hay solución o hay una sola. En conclusión, pues:

Las dominantes principales de una $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$ son simplemente las dominantes de la $\Gamma_{\Phi}^{p_1}$ contenida en ella, y para cada orden existe a lo sumo una dominante principal.

Así, en la Γ^3 , las dominantes sucesivas son:

$$\text{de 1}^{\text{er.}} \text{ orden: } \frac{3}{2}$$

$$\text{» } 2^{\text{o}} \quad \text{»} \quad : \frac{4}{3}$$

$$\text{» } 3^{\text{er.}} \quad \text{»} \quad : \text{no existen}$$

$$\text{» } 4^{\text{o}} \quad \text{»} \quad : \text{»} \quad \text{»}$$

$$\text{» } 5^{\text{o}} \quad \text{»} \quad : \frac{9}{8}$$

etc.

Como ejemplo de todo lo dicho, tomemos primero la gama tolemaica cromática. Si tomamos la tónica *do*, en virtud de lo que hemos visto en el § 51, *a*), la primera dominante es *sol*; en virtud de *b*) las segundas dominantes son *fa* y *la* (solo la primera es principal); las terceras dominantes, consideradas en *c*), son el *la_b*, *mi_b* y *si_b* (ninguna principal), aparte de otra $\left(\frac{7}{5}\right)$ que ya no pertenece a la gama. Los acordes respectivos son:

de *do*: do-mi-sol
 » *sol*: sol-si-re
 » *fa*: fa-la-do
 » *la*: la-do#-mi
 » *la_b*: la_b-do-mi_b
 » *mi_b*: mi_b-sol-si_b
 » *si_b*: si_b-re-fa(?) .

Por consiguiente, obtendríamos las siguientes gamas melódicas:

Con una dominante 1ª: do-re-mi-sol-si

» » » » y una dominante 2ª: do-re-mi-fa-sol-la-si
 » » » » dos » 2ª: do-do#-re-mi-fa-sol-la-si

y así sucesivamente.

Hay que tener en cuenta que la dominante segunda que aparece en esta gama, no es principal, es decir, no aparece en tal carácter en la gama pitagórica, mientras que el *fa* es común a ambas gamas (principal). Como ya hemos dicho, usualmente se prescinde de esta dominante *la* (así como de las de órdenes superiores), y queda así la gama melódica mayor de todos conocida: do-re-mi-fa-sol-la-si. Obsérvese que si en lugar de la gama tolemaica hubiéramos tomado la pitagórica, como en ésta los acordes son de dos notas, habríamos tenido que tomar cinco dominantes (véase la tabla del § 54), a saber: *sol*, *fa*, *re*, *la* y *mi*, para llegar a obtener, con los acordes respectivos: do-sol, sol-re, fa-do, re-la, la-mi, mi-si la gama melódica homónima.

En la gama melódica tolemaica usual, las dos dominantes princi-

pales sol y fa se designan ordinariamente como *dominante* y *subdominante* respectivamente, como ya dijimos.

Para el ejemplo correspondiente a las tonalidades menores, en la gama tolemaica cromática, consideraremos como tónica el sol. El acorde menor de tónica es entonces sol-mi $\flat$ -do, en sentido descendente, y si el sol es la unidad, el mi $\flat$ es $\frac{4}{5}$ y el do $\frac{4}{3}$. La primera dominante es el re (principal), las segundas do (principal) y mi (no principal). Detengámonos aquí, ya que el proceso se aprecia ya claramente en este ejemplo. Se tiene ahora:

Acordes menores: de sol: sol--mi $\flat$ -do

» re: re-si $\flat$ -sol

» do: do-la $\flat$ -fa

» mi: mi-do-la ,

y las gamas melódicas son:

con una dominante 1ª: sol-mi $\flat$ -re-do-si $\flat$

» » » » y una dominante 2ª: sol-fa-mi $\flat$ -re-do-si $\flat$ -la $\flat$

» » » » dos » » : sol-fa-mi-mi $\flat$ -re-do-si $\flat$
la-la $\flat$

etc.

Generalmente, y por razones análogas a las del caso anterior, se adopta la segunda de estas gamas, que se suele escribir en sentido ascendente y a partir del do, así: do-re-mi $\flat$ -fa-sol-la $\flat$ -si $\flat$. Como en el caso de la tonalidad mayor, el re se llama generalmente la dominante y el do la subdominante.

En el caso de la gama de Domínguez Berrueta, las dominantes 1ªs y 2ªs son las mismas que en el caso tratado; pero todos los acordes están formados por cuatro notas, de las cuales algunas faltan sin embargo en la $\Gamma_{\Phi}^{3,5,7}$. Así, para el acorde mayor de tónica do, hay que agregar la nota te; para la 1ª dominante (principal) sol, habría que agregar una nota mi# (?) que no existe; y para las segundas dominante fa, la, hay que agregar respectivamente las notas re# y fa $\times$ (?) (el signo $\times$ equivale a doble sostenido, ##) ésta última inexistente. Así, la gama melódica mayor de do sería do-re-re#-mi-

fa-sol-la-te-si ⁽¹⁾ (con solo dos dominantes principales). Análogamente, la gama menor de sol sería sol-sol $\flat$ -fa-mi $\flat$ -re-do-si $\flat$ -la $\flat$, faltando en la gama tres notas mi $\flat\flat$ (?), si $\flat\flat$ (?) y fa $\flat$ (?) que forman parte de los acordes de las dominantes.

57. — Ya hemos indicado que las nociones de tónica y dominantes (en particular, dominante y subdominante) son de importancia básica en la armonía, así como los conceptos de notas diatónicas y cromáticas juegan un papel preponderante en la melodía. En lo anterior, el músico que haya seguido nuestras consideraciones habrá notado que hemos dado a estos conceptos un sentido más amplio que el usual. Creemos que ello es necesario: por una parte, esta mayor amplitud de conceptos nos es sugerida por la teoría misma, tal como la hemos presentado, y esta teoría no tiene otros fundamentos que los hechos acústicos que se observan en la naturaleza. Por eso hemos criticado en el capítulo correspondiente la gama atemperada usual, así como otras gamas «artificiales», donde se ha hecho caso omiso de los fenómenos acústicos que de por sí, naturalmente, nos están señalando el camino a seguir; hemos errado el buen camino, y creemos que se debe volver a él. Por otra parte, los músicos nos darán la razón, cuando probemos a la luz de ejemplos que daremos oportunamente, que ellos mismos han tendido, y particularmente en los tiempos actuales, a salir del estrecho marco de la gama atemperada, intuyendo, consciente o inconscientemente, un *plus ultra* fuera de los cánones. Ese plus ultra es el que creemos haber puesto en claro en lo que antecede, o por lo menos, haber dado las bases para una teoría más completa y más racional sobre todo, de la música.

Antes de dar esos ejemplos, hagamos algunas observaciones sobre los últimos puntos tratados.

La teoría de la tonalidad se completa con el estudio de las *cadencias*. Se efectúa una cadencia cuando se pasa de un acorde de una de las dominantes al acorde de tónica. Este último es como el eje alrededor del cual gira toda la trama armónica de una composición o un trozo, o la meta armónica a donde nos dirigimos; el acorde de tónica da, pues, la sensación de final, de reposo, es el punto donde *decae* la tensión (de ahí el nombre de la cadencia). Como se ve, damos también una mayor amplitud a este concepto, admitiendo cadencias a partir de cualquiera de las dominantes aceptadas. El esquema más simple e inmediato de una cadencia es: dominante-tónica,

(1) Discrepamos en este punto con Domínguez Berrueta, que no admite el re $\sharp$ como nota diatónica.

y entre éstas, las más simples son: dominante (en el sentido usual)-tónica, o sea la cadencia *perfecta*, y subdominante-tónica, o cadencia *plagal*. Por ejemplo, en do mayor: sol-do y fa-do.

La teoría de la *modulación* puede también desarrollarse en base a lo dicho. Se entiende por modulación un cambio, suficientemente estable, de tonalidad. La modulación a un tono nuevo va precedida, generalmente, de una cadencia sobre la nueva tónica, o sobre una de sus dominantes. Podemos repetir aquí que con la amplitud de conceptos adoptada, las posibilidades de modulación se hacen más ricas. También los acordes llamados *modulantes* son más numerosos y se prestan a más variadas combinaciones.

En las modulaciones debemos tener en cuenta una circunstancia importante, debida en esencia a la desigualdad de los intervalos de toda $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$. Si consideramos, por ejemplo, el cuadro de notas de la $\Gamma_{ABGH}^{3,5}$ tolemaica cromática (§ 26), observaremos que a partir del do, los intervalos se distribuyen irregularmente así:

0,05890 ; 0,05214 ; 0,05889 ; * 0,05889 ; 0,03422 ; 0,05889 ; 0,03422 ;
0,02468 ; 0,03421 ; 0,05890 ; 0,05214 ; 0,05888 ; 0,05890 ; 0,03424 ;
0,05889 ; 0,05890 ; 0,05214 ; 0,05888 ; 0,03422 ; 0,02468 ; 0,03421 ;

o sea, con las notaciones de la fórmula [5] del § 32:

$i_1 + i_2$; $i_1 + i_2 - \varepsilon$; $i_1 + i_2$; * $i_1 + i_2$; i_1 ; $i_1 + i_2$; i_1 ;
 i_2 ; i_1 ; $i_1 + i_2$; $i_1 + i_2 - \varepsilon$; $i_1 + i_2$; $i_1 + i_2$; i_1 ;
 $i_1 + i_2$; $i_1 + i_2$; $i_1 + i_2 - \varepsilon$; $i_1 + i_2$; i_1 ; i_2 ; i_1 .

Por consiguiente, si adoptamos en lugar del do otra tónica, por ejemplo re, a partir de esta nota los intervalos ya no se disponen en la misma forma, sino que comienzan con el marcado con asterisco, siguen en orden hasta el último escrito, y luego vienen los tres primeros; o sea, en resumen, que estos tres han pasado a último término, pero conservando el orden cíclico total. En consecuencia, algunos de los intervalos de la gama original, por ejemplo el intervalo de quinta:

$$\begin{aligned} 1 \chi = 0,58496 \omega &= 6 (i_1 + i_2) + 2 (i_1 + i_2 - \varepsilon) + 3 i_1 + i_2 = \\ &= 11 i_1 + 9 i_2 - 2 \varepsilon , \end{aligned}$$

no puede formarse a partir de la nueva tónica. La gama armónica no pierde por ésto su carácter tolemaico, pero está, diremos, en otro modo ⁽¹⁾. Al alterarse así la disposición de los intervalos por el cambio de modo, claro está que la gama melódica también cambia en general. De ahí que se produzcan variaciones en las relaciones armónicas: algunas dominantes pueden desaparecer, o aparecer otras nuevas, o aunque no sufran tales modificaciones las notas fundamentales de los acordes de las dominantes, pueden aparecer o desaparecer algunas de las restantes notas de esos acordes, etc. Sin embargo, como la gama total no ha perdido su carácter (en este caso, el hecho de que es siempre una $\Gamma^{3,5}$) podemos aquí, con buen derecho, hacer uso del principio de sustitución (§ 42) para restablecer los acordes o notas que falten por medio de notas de la misma gama. La « distorsión », si se nos permite esta expresión, es así menor que en cualquier otro caso en que intervengan armónicos extraños.

Para no extendernos demasiado, bastará para nuestro objeto con dos ejemplos. El primero, es el que ya hemos tomado, que completaremos en sus detalles: cambio de tonalidad de do mayor a re mayor en la gama tolemaica cromática, con el correspondiente cambio de modo. Los intervalos de esta gama son los ya indicados.

Limitémonos al caso de la gama melódica usual: do-re-mi-fa-sol-la-si para el tono de do (mayor), es decir, admitamos solo las dos dominantes principales sol y fa, situadas, con respecto a la tónica, a una quinta, $1\chi = 0,58496\omega$, y una cuarta $= 1\omega - 1\chi = 0,41504\omega$. A partir de la tónica re admitiremos también las dos dominantes, y veremos cómo puede formarse la nueva gama melódica de re mayor con esas dos dominantes. El acorde de tónica de do es do-mi-sol, con los intervalos:

$$\text{quinta:} \quad \text{do-sol} = 1\chi = 0,58496\omega = 11i_1 + 9i_2 - 2\varepsilon$$

$$\text{tercera:} \quad \text{do-mi} = 1\tau = 0,32193\omega = 6i_1 + 5i_2 - \varepsilon.$$

El acorde de dominante sol-si-re solo agrega las notas si, re, cuyos intervalos con el do son:

$$\text{séptima:} \quad \text{do-si} = 0,90689\omega = 17i_1 + 14i_2 - 3\varepsilon$$

$$\text{segunda:} \quad \text{do-re} = 0,16993\omega = 3i_1 + 3i_2 - \varepsilon$$

(1) Esta noción de modo no coincide con los usuales modos mayor y menor, a los que propondríamos llamar *sistemas* mayor y menor, aunque tiene análogo fundamento, a saber, la distinta disposición de los intervalos sucesivos.

y el de subdominante fa-la-do agrega las notas fa, la, con los intervalos:

$$\text{cuarta:} \quad \text{do-fa} = 0,41504 \omega = 8 i_1 + 6 i_2 - \varepsilon$$

$$\text{sexta:} \quad \text{do-la} = 0,73697 \omega = 14 i_1 + 11 i_2 - 2 \varepsilon,$$

de modo que la gama melódica se compone de estos intervalos, a partir del valor $0,00000 \omega$ correspondiente al do. Si formamos los mismos intervalos a partir del re (reduciendo siempre a la octava) tendremos:

$$\text{quinta: } 0,16993 + 0,58496 = 0,75489 \omega = 14 i_1 + 12 i_2 - 3 \varepsilon:$$

$$\text{inexistente} — \text{Nota más próxima: la} = 0,73697 \omega$$

$$\text{tercera: } 0,16993 + 0,32193 = 0,49186 \omega = 9 i_1 + 8 i_2 - 2 \varepsilon:$$

$$\text{inexistente} — \text{Nota más próxima: fa\#} = 0,47394 \omega$$

$$\text{séptima: } 0,16993 + 0,90689 - 1 = 0,07682 \omega = i_1 + 2 i_2 - \varepsilon:$$

$$\text{inexistente} — \text{Nota más próxima: do\#} = 0,05890 \omega$$

$$\text{segunda: } 0,16993 + 0,16993 = 0,33986 \omega = 6 i_1 + 6 i_2 - 2 \varepsilon:$$

$$\text{inexistente} — \text{Nota más próxima: mi} = 0,32193 \omega$$

$$\text{cuarta: } 0,16993 + 0,41504 = 0,58497 \omega = 11 i_1 + 9 i_2 - 2 \varepsilon = \text{sol}$$

$$\text{sexta: } 0,16993 + 0,73697 = 0,90690 \omega = 17 i_1 + 14 i_2 - 3 \varepsilon = \text{si}.$$

Luego, en rigor, la gama melódica de re mayor constaría solo de las notas re-sol-si. En estos casos es donde tiene su aplicación más legítima y fecunda el principio de sustitución: sustituímos las notas inexistentes por sus representantes más próximas, que tienen en este caso la propiedad de no alterar el carácter de la gama, pues no introducen armónicos nuevos; y obtenemos así la gama melódica: re-mi-fa\#-sol-la-si-do\#. Obsérvese que ya el acorde de tónica no es exactamente el acorde mayor que correspondería (los de dominante y subdominante sí lo son) y en ésto se manifiesta el cambio de modo, que si bien no produce un cambio de carácter en la gama, lo produce en la melodía. En esto creemos ver la razón de que se atribuya a determinadas tonalidades un carácter propio, unas veces brillante, otras suave y melancólico, y así sucesivamente. En el ejemplo que hemos tomado, obsérvese que las notas alteradas son más bajas que las que corresponderían, en la magnitud constante $0,01792 \omega$. Este descenso

de altura produce una cierta disminución de la brillantez y energía propias del tono de do mayor.

El segundo ejemplo, tal vez más luminoso (debido a los intervalos más grandes y más diferentes entre sí) es el de la gama pentatónica que, como ya dijimos, puede representarse aproximadamente en nuestro sistema actual por las notas: do-re-fa-sol-la. Pueden distinguirse así cinco modos, que son:

- Modo I - Do-re-fa-sol-la; sin 3^a ni 7^a (con relación a la gama tolemaica);
- » II - Re-fa-sol-la-do; » 2^a » 6^a;
- » III - Fa-sol-la-do-re; » 4^a » 7^a;
- » IV - Sol-la-do-re-fa; » 3^a » 6^a;
- » V - La-do-re-fa-sol; » 2^a » 5^a.

Véase el estudio que hace Helmholtz (VIII) de estas gamas.

Mediante esos cambios de modo se explica a veces la discrepancia aparente entre las tablas de una misma gama. Por ejemplo, es posible que algunas de las tablas que hemos dado en los §§ 23, 24 para las gamas pitagórica y tolemaica no coincidan aparentemente con las de otros autores ⁽¹⁾, pero disponiendo en otra forma los intervalos, sin variar su orden cíclico, esta discrepancia desaparece. Lo esencial en una gama atemperada no es la sucesión de notas, ni los nombres de éstas, sino la sucesión de intervalos.

En estrecha conexión con estos cambios de modo se presenta la cuestión de la *transposición* o *transporte*. Incidentalmente hemos tocado ya este punto en el § 35, pero ahora se nos presenta a plena luz: es en general imposible, en una $\Gamma_{\Phi}^{p_1 \dots p_r}$, cualquiera transportar o transponer una melodía dada en un tono a otra tonalidad, conservando estrictamente los intervalos de esa melodía. Lo que acabamos de decir con respecto a los acordes de una tonalidad y a la gama melódica se aplica íntegramente al caso de una melodía cualquiera. Esta puede aparecer así en diversos modos, diríamos también con diversos matices, y ello, lejos de ser un inconveniente, puede constituir en manos del artista, un recurso de extraordinaria fecundidad y belleza; recurso al que renunciamos voluntariamente, cuando adoptamos la gama atemperada, exactamente uniforme en toda su extensión.

(1) Por ejemplo MURRAY BARBOUR (XI).

58. — Trataremos de confirmar finalmente con algunas reflexiones y ejemplos, no sólo el hecho de que la teoría expuesta no está tan alejada de la realidad como parece, sino que, consciente o inconscientemente (ya lo hemos dicho) la música tiende a salirse del estrecho marco que le fija la gama atemperada, en busca de cauces más naturales. En particular en las obras contemporáneas, es fácil descubrir, aún bajo la máscara de nuestro sistema melódico y armónico, esa tendencia.

En primer lugar, procedamos a una experiencia fácil de realizar, y también de explicar: imaginemos un violinista en trance de templar su instrumento, y con nuestro piano (bien afinado) procedamos a « darle el la », como es usual. El violinista procederá a templar la segunda cuerda de su instrumento de acuerdo con ese la_3 y, si tiene por lo menos una relativa práctica, lo conseguirá exactamente. Pero ahora dejémoslo que afine sus otras cuerdas a oído, sin confirmar su afinación por medio del piano. Sabido es que el violín se afina por quintas, de modo que si la segunda cuerda es el la_3 , la primera cuerda o *prima* dará el mi_4 , la tercera el re_3 , y la cuarta el sol_2 : estas dos últimas son más bajas, la primera más alta que el la_3 de donde partimos. Confrontemos en seguida su afinación con la del piano. Pues bien: creemos no equivocarnos al afirmar que, en la gran mayoría de los casos, habrá afinado la primera demasiado alta, y las otras dos cuerdas demasiado bajas.

¿Qué explicación tiene ésto? ¿Por qué se ha equivocado el violinista? O más bien: ¿quién está equivocado: el violinista o el piano? Observemos ante todo que las diferencias en la afinación reconocen una causa común: el violinista ha estimado las quintas demasiado grandes (con relación a las del piano); pues así se explica que, con respecto al punto de partida fijo y común para ambos instrumentos, el la_3 , las notas más altas (el mi_4), aparezcan más elevadas aún en el violín que en el piano; mientras que las más bajas (el re_3 y el sol_2) aparezcan más bajas. Esto sentado, la explicación surge inmediatamente: la quinta justa, natural, o sea la quinta pitagórica, es, en efecto, mayor que la quinta atemperada. La quinta pitagórica vale $0,58496 \omega$ (véase el cuadro de equivalencias del § 10), mientras que la quinta atemperada, que consta de siete semitonos atemperados, vale $7\alpha = 7 \times 0,08333 = 0,58333 \omega$. El oído nos lleva a apreciar muy exactamente las quintas justas, y de ahí que el violín, afinado por quintas justas, aparezca desafinado respecto al piano. Es, pues, a este último y no al violinista a quien debemos calificar de « desafinado » (con respecto a la afinación natural).

La misma explicación tienen otros fenómenos que se observan muy frecuentemente. Supongamos, por ejemplo, una melodía que, del tono de do mayor, module a mi mayor, luego a sol $\sharp$ mayor, y finalmente regrese a do mayor; o más simplemente aún, supongamos que la melodía se reduzca a estas cuatro notas: do₃-mi₃-sol $\sharp$ ₃-do₄. Si nuestro violinista ejecuta esas cuatro notas « de oído », partiendo del do₃ en concordancia exacta con el piano, su do₄ final será más bajo que el do₄ del piano. La explicación es que esas cuatro notas forman entre sí (aproximadamente las dos últimas) tres terceras tolemaicas, y la tercera tolemaica $1\tau = 0,32193\omega$ es menor que la tercera atemperada, compuesta por cuatro semitonos, o sea $4\alpha = 4 \times 0,08333 = 0,33333\omega$; al ejecutar tres terceras sucesivas, no se ha hecho sino acentuar el fenómeno, multiplicando la discrepancia. Análogamente, es un hecho sabido que los instrumentos de metal por ejemplo, dan las quintas « muy altas », siendo necesario a veces recurrir a la obstrucción parcial del pabellón, o al uso de pistones u otros mecanismos para bajar las notas (mecanismos que, por otra parte, restan naturalidad y frescura al sonido). Lo que ocurre es que esas quintas son exactamente pitagóricas, y se las debe bajar para hacer concordar esos instrumentos con el resto de la orquesta. Un fenómeno semejante ocurre a veces con las voces humanas.

Todo esto contribuye a probar que el fenómeno de los armónicos sucesivos, cuya realidad objetiva está fuera de discusión, constituye el fundamento lógico y natural para una teoría acústico-musical. Toda persona con algún oído, y por escasa que sea su cultura musical, es capaz de dar con muy grande exactitud los intervalos de quinta y tercera justas, y aún el de séptima do-te, o de apreciarlos en un instrumento de sonidos variables, como el violín; en cambio los cantantes y violinistas se ven obligados a corregirse a cada paso, para no discordar o « desafinar » con el instrumento que los acompaña: de ahí la sensación de belleza y majestad que nos producen los coros *a cappella* y los conjuntos de cuerdas solas (por ejemplo los cuartetos), en donde las voces no tienen aquella traba, y pueden desenvolverse libremente según los dictados del sentido musical de los ejecutantes. ¿No es ésto una prueba de que marchamos por un camino equivocado, y debemos volver al bueno?

59. — Como un ejemplo magnífico (y por otra parte, muy conocido) de aplicación de la escala armónica en toda su pureza (salvo la atemperación de los instrumentos) podemos citar el Prólogo del « Oro del Rhin ». En él, Wagner, para dar la sensación de la naturaleza que despierta poco a poco, nos hace oír, para comenzar, una

sola nota, profunda y larga, un $mi\flat_1$, al que se van agregando luego, en su orden, las notas: $mi\flat_2$ (la octava del anterior), $si\flat_2$ (la quinta de la octava, o sea el armónico 3), $mi\flat_3$ (la doble octava, o armónico 4) y sol_3 (tercera de la doble octava, o armónico 5). Estos armónicos, oídos así en su orden natural, dan a maravilla la sensación requerida. Siguen luego arpeggios y otras figuraciones, con notas tomadas exclusivamente entre esos armónicos, que forman en conjunto un simple acorde mayor gigantesco, que se hace oír durante 136 compases. Esas figuraciones representan los movimientos de las aguas, y la sensación es tan exacta y nítida que no nos sorprendemos cuando, al levantarse el telón, nos encontramos en el fondo del gran río.

No sólo los armónicos 3 y 5 (correspondientes a las quintas y terceras, respectivamente) presentan un carácter de evidencia para la intuición musical, sino también los armónicos superiores, especialmente el siguiente, o sea el 7. Este se introduce subrepticamente en la música, ya desde Monteverdi, particularmente bajo la forma, alterada, del acorde de séptima de dominante; por ejemplo, do-mi-sol-si $\flat$. Este no es sino un acorde imperfecto, donde la nota si $\flat$ está sustituyendo, lo más próximamente posible, a la nota te que representa precisamente el armónico 7 en su pureza.

Si bien al principio no se usó este acorde como conclusivo (acorde de tónica) ello está sucediendo ahora, y no sólo entre los autores de música seria, sino que ha llegado ya al terreno popular: en la música de *jazz* es corriente encontrarlo como acorde de tónica; no necesitamos citar ejemplos especiales.

Por otra parte, ya hemos visto ejemplos de acordes, cuyo uso es muy común desde hace tiempo, y que se interpretan sin dificultad como acordes imperfectos o alterados en los que interviene el armónico 7. En el § 42 hemos visto, entre otros, los ejemplos: $[\overline{6}, 2(\overline{7})] = \text{mi-sol-si}\flat\text{-re}\flat$; $[\overline{6}, 2(\underline{7})] = \text{mi-sol-si}\flat\text{-do}\sharp$; $\{5, 4(\underline{7})\} = \text{mi}\flat\text{-do-la-fa}\sharp$, acordes modulantes por excelencia, así como los siguientes, utilizados más modernamente: $[\overline{6}, 2(\overline{7}, \overline{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la-si-re}\flat$, ó $[\overline{6}, 2(\underline{7}, \underline{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la-si-re}\flat$ o $[\overline{6}, 2(\underline{7}, \underline{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la-si-do}\sharp$; $\{\overline{5}, 4(\underline{7})\} = \text{mi-do-la}\sharp\text{-sol}$, $\{\underline{5}, 4(\underline{7})\} = \text{mi-do-la}\flat\text{-fa}\sharp$, etc.

En « El amor brujo » de Manuel de Falla, en la « Danza del fuego », los primeros compases están armonizados por un acorde que se reduce a: do-mi $\flat$ -sol-la. Este acorde, escrito en forma descendente (sol-mi $\flat$ -do-la) se reconoce fácilmente como representante de un acorde de la gama de Domínguez Berrueta, el acorde menor de sol: $\{4, 2, 2\}$ (véase el cuadro de esta gama en el § 33).

Los acordes ya citados $[\overline{6}, 2(\overline{7}, \overline{11})] = \text{mi}\flat\text{-sol-la-si-do}\sharp$ y análogos sirven también para explicar la procedencia de la «escala de tonos enteros» usada con frecuencia entre los autores modernos, Debussy, Ravel, etc. Véase por ejemplo en los «Six épigraphes anti-ques» de Debussy, el segundo: «Pour un tombeau sans nom», donde se hace un uso preponderante de esa escala, armonizada con acordes análogos al que tratamos.

También en la misma obra, en el primer epígrafe: «Pour invoquer Pan, dieu du vent d'été», es de notar el uso de la gama pentatónica, que es muy frecuente en toda la literatura musical contemporánea; véase por ejemplo, del mismo autor: «Pagodes», o aún mejor, la pieza de Ravel «Laideronnette, impératrice des pagodes» (de la suite «Ma mère l'Oye»), cuya melodía está construída exclusivamente con las notas negras del piano, que constituyen justamente una gama pentatónica. La misma idea de las «pagodas» aparece así, en ambos autores, expresada de igual manera, mediante el uso de esta gama primitiva.

Podríamos multiplicar los ejemplos, y aún dar otros en que resultara palpable la presencia, disfrazada, de armónicos más elevados, el 13 por ejemplo. Pero creemos que basta ya con lo dicho. Séanos permitido, para terminar, repetir una vez más lo que ya dijimos en la Introducción: la matemática sola no es capaz de explicarlo todo en música, y ni siquiera pretendemos que la teoría expuesta explique todo lo que la matemática puede explicar en tan interesante terreno. Solamente hemos querido con esta publicación, resumir ideas conocidas y algunas nuevas, o presentadas en forma nueva, mostrando que la matemática tiene también un papel que cumplir en este campo. Está fuera de duda que no llegaremos a «escribir música en ecuaciones» (ni lo desearíamos), pero la parte científica de la música, tan abandonada por los músicos, puede ser tratada con medios matemáticos, lográndose así darle un fundamento general, sólido y de mayor amplitud y profundidad.

A. E. SAGASTUME BERRA

LAS TEORIAS SOBRE CONDUCTIBILIDAD ELECTROLITICA
Y METALICA Y EL CAMPO MAGNETICO PRODUCIDO
POR LAS CARGAS EN MOVIMIENTO

POR EL DR. VIRGILIO TEDESCHI

La interpretación casi generalmente admitida de la conductibilidad en los electrolitos está basada, como es notorio, en la teoría de la disociación electrolítica, debida principalmente a Arrhenius, aunque la idea fundamental había sido enunciada por Clausius, que a su vez había tenido un precursor en Williamson, que en 1851 ya admitía que las moléculas de las sustancias disueltas pueden espontáneamente separarse en partes.

Los enunciados fundamentales de tal teoría son los siguientes:

En una solución de un electrolito, o sea de todo cuerpo capaz de conducir la corriente, una parte de las moléculas se encuentra disociada. El grado de disociación, o sea la relación entre el número de moléculas disociadas y el número total de moléculas, depende de la concentración, y aumenta a medida que la concentración disminuye. Entre las moléculas no disociadas y los iones, o sea las partes en que se separan las que se disocian, existe un estado de equilibrio dinámico, constituyendo por consiguiente, la disociación, un proceso reversible que obedece, a lo menos en el caso de los electrolitos débiles (poco disociados) a la ley de Guldberg y Waage.

Así, por ejemplo, para un ácido débil que contenga un átomo de H disociable puede establecerse la ecuación:

$$\frac{(H^+) (A^-)}{(HA)} = K$$

representándose con el paréntesis la concentración de los iones y de las moléculas no disociadas, y siendo K la llamada constante de disociación.

De la ecuación precedente puede deducirse la conocida ley de dilución de Ostwald:

$$\frac{\alpha^2 c}{1 - \alpha} = K$$

en la cual α representa el grado de disociación y c la concentración. Se supone además que los iones poseen una carga eléctrica positiva o negativa que es proporcional a su valencia química, correspondiendo a cada valencia una carga constante que coincide con el valor del electrón, tal como ha podido determinarse en muchos otros fenómenos (ionización de los gases, Millikan, 1908-1917, rayos catódicos, radioactividad).

En el caso de la electrolisis tal valor se calcula dividiendo el número de Faraday, o sea la carga que corresponde a cada equivalente-gramo depositado sobre un electrodo, por el número N de Avogadro, o sea el número de moléculas contenidas en una molécula-gramo.

Solamente la parte periférica de los átomos, o sea los electrones planetarios, intervienen en la producción de tal carga, suponiéndose que al separarse cada molécula en iones, uno o más átomos o grupos atómicos (los cationes), pierden uno o más electrones (negativos) según su valencia, electrones que quedan agregados al otro o a los otros átomos o grupos atómicos (los aniones). Esta concepción, por otro lado, concuerda con la observación de muchos fenómenos en los cuales solamente cargas negativas (electrones o negatones) parecen susceptibles de separarse del átomo, y no puede modificarse en lo más mínimo con el descubrimiento reciente del electrón positivo (positrón o positón) en los fenómenos de radioactividad artificial llamada positógena, como en el caso del boro, que, bajo la acción de partículas α emitida por el polonio, pierde un neutrón, formándose un isómero del nitrógeno que a su vez por la pérdida de un positón se transforma en un isótopo del carbono. Se trata en este caso de fenómenos nucleares, que representan una verdadera transmutación del átomo.

Se supone que los iones con sus cargas sean completamente libres, obedeciendo únicamente a fuerzas eléctricas. En un campo eléctrico, a sus movimientos espontáneos, se agrega una componente en la dirección del mismo campo, y el pasaje de una corriente en un electrolito consiste en un transporte de cargas positivas y negativas en sentido opuesto, por parte de los iones que se mueven venciendo el

frotamiento del disolvente, con una transformación de trabajo en energía térmica, lo que explica el efecto Joule, que en los electrolitos obedece a la misma ley que en los conductores metálicos. Al llegar en contacto con los electrodos, los iones les comunican sus cargas eléctricas, lo que de acuerdo con lo expresado antes, debe interpretarse así: los aniones ceden al anodo los electrones que tienen en exceso, y los cationes sacan del catodo los electrones que les faltan. Al descargarse los iones se producen las acciones secundarias, de carácter esencialmente químico, y aparecen los productos de la electrolisis.

Las anomalías que presentan los electrolitos con respecto a la presión osmótica y otros fenómenos conexos (descenso del punto de congelación, elevación del punto de ebullición y disminución relativa de la tensión del vapor) son más aparentes que reales, si se tiene en cuenta que todos estos fenómenos están en relación con la concentración de partículas, moléculas no disociadas e iones.

En la ecuación:

$$PV = iRT$$

el factor de corrección i de Van t'Hoff representa precisamente la relación entre el número total de partículas, y el número de moléculas supuestas no disociadas, o sea:

$$i = \alpha(n - 1) + 1$$

siendo n el número de iones en los cuales se separa cada molécula disociada y α el grado de disociación.

En el transporte de la electricidad contribuyen los aniones y los cationes, pero en grado distinto, lo que es consecuencia de la distinta velocidad de las dos especies de iones, ya puesta en evidencia por Hittorf en una serie de investigaciones efectuadas entre 1853 y 1859. Los números de transporte de Hittorf, determinados mediante el enrarecimiento del electrolito en la proximidad de los electrodos, representan precisamente la velocidad relativa de las dos especies de iones. La relación entre tales números de transportes:

$$\frac{u}{u + v} \quad \frac{v}{u + v}$$

nos da la relación $\frac{u}{v}$ de las dos velocidades, que representa, al mis-

mo tiempo, la relación entre las cargas opuestas transportadas contemporáneamente por las dos especies de iones, cargas cuya suma, no teniendo en cuenta el signo, es la carga total, que dividida por el tiempo, da la intensidad de la corriente. Como resulta de los trabajos de Kohlrausch, la movilidad de cada ión, en una solución diluída, no depende de la naturaleza del otro ión, o sea, es independiente de la composición del electrolito. La conductibilidad límite equivalente, o sea el producto de la conductibilidad específica por el volumen ocupado por un equivalente-gramo en estado de gran dilución, tal que todas las moléculas puedan prácticamente considerarse disociadas, es pues, una magnitud aditiva, igual a la suma de las conductibilidades límites equivalentes del anión y del catión.

Considerando ahora en conjunto el fenómeno de la corriente en el electrolito y la parte metálica del circuito, me referiré brevemente a las hipótesis fundamentales en que se basan las teorías sobre la conducción de los metales, y, en general, en los buenos conductores.

Se imaginó, ante todo, que el transporte de la electricidad fuera operado por partículas cargadas de electricidad, desligadas de las moléculas o de los átomos del conductor, e independientes de la naturaleza química de éste. Más tarde, se identificaron tales partículas con los electrones, suponiéndose que éstos se separen de los átomos del metal, que se transformarían así en iones positivos, constituyendo estos últimos, susceptibles en los conductores metálicos en estado sólido sólo de oscilar alrededor de posiciones fijas de equilibrio, un retículo espacial. Entre un ión y otro se mueven irregularmente los electrones, estableciéndose un estado de equilibrio dinámico entre átomos que se disocian, iones y electrones. Al establecerse una diferencia de potencial en dos puntos del conductor, o en otras palabras, al encontrarse en un campo eléctrico, en el interior del metal, los electrones agregan a sus movimientos irregulares, una componente en la dirección de la fuerza eléctrica, y esto constituye el fenómeno de la corriente. Se supone que los electrones recorran un breve camino libre, y al chocar contra los átomos o iones le comuniquen parte de su energía cinética que se manifiesta como calor. En otras palabras, los electrones libres forman en el interior del conductor una especie de gas electrónico, al cual son aplicables muchos de los conceptos y deducciones de la teoría cinética, por ejemplo, el principio de la equipartición de la energía, por el cual átomos o iones y electrones poseerían la misma fuerza viva media.

En base a tales ideas fundamentales, Drude y Riecke construyeron, al terminar el siglo pasado, una teoría de la conductibilidad, que fué elaborada sucesivamente por H. A. Lorenz, J. J. Thomson, Wien, Planck y otros, tratando de interpretar las relaciones entre la conductibilidad térmica y eléctrica, o sea la ley de Wiedemann y Franz, el efecto termoiónico y otros fenómenos.

La teoría originaria de Riecke y Drude fué recientemente perfeccionada por Sommerfeld, utilizando la nueva mecánica estadística de Fermi y Dirac, y por Houston con la mecánica ondulatoria, pero lo que únicamente me interesa es hacer notar que, cualquiera que sean los aspectos de las teorías, la idea fundamental para interpretar el fenómeno de la corriente es siempre la de un movimiento de electrones en un único sentido, el inverso del que se atribuye convencionalmente a la corriente. La intensidad de ésta es igual a la suma de las cargas electrónicas que en la unidad de tiempo atraviesan una sección del conductor.

En un circuito formado por un electrolito y un conductor metálico, el número de electrones que atraviesan en la unidad de tiempo, una sección de este último, debe ser necesariamente igual, salvo las pequeñas fluctuaciones en los iones del electrolito y en los electrones del metal, al número de iones monovalentes, o al producto de su valencia por el número de iones monovalentes o polivalentes de los dos signos que en la misma unidad de tiempo atraviesan una sección del conductor.

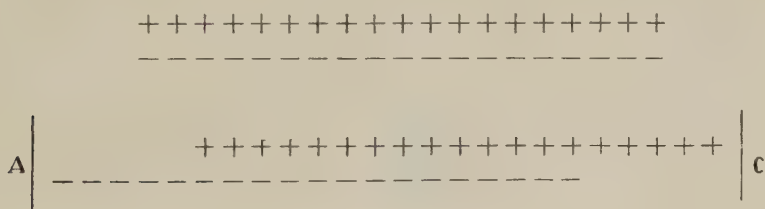
La imagen que necesariamente debemos formarnos del pasaje de la corriente en el circuito mencionado es la siguiente:

Los aniones ceden al anodo el electrón o los electrones que poseen en exceso, y estos circulando en la parte metálica del circuito llegan al catodo, a contacto del cual se apoderan de ello los cationes.

Si la intensidad de la corriente en un electrolito es igual a la suma de los valores absolutos de las cargas que atraviesan en los dos sentidos una sección del conductor en la unidad del tiempo, llegamos a la conclusión de que el número de cargas negativas elementales comunicadas por los aniones al anodo es igual al número de cargas positivas comunicadas por los cationes al catodo o, más exactamente, al número de cargas negativas substraídas al mismo, y que ambos números coinciden con la suma de las cargas positivas y negativas que atraviesan en el mismo tiempo, en los dos sentidos opuestos, una sección del conductor electrolítico.

Es este en realidad uno de los puntos menos claros de la teoría.

La imagen del fenómeno — imagen que recuerda demasiado su forma originaria basada en la antigua teoría de Grothus, y que se encuentra en todos los tratados, y en general, se emplea para demostrar como el enrarecimiento distinto del electrolito, en proximidad de los electrodos, corresponda a la distinta velocidad relativa de las dos especies de iones y permita su medición es, en el caso, por ejemplo, de velocidades relativas 2:3, la siguiente:



Las moléculas descompuestas en este ejemplo son cinco, y los iones que quedan libres de ambos lados, en proximidad de los electrodos, son igualmente cinco, y cinco es también el número de cargas de los dos signos que han atravesado una sección del conductor electrolítico en los dos sentidos.

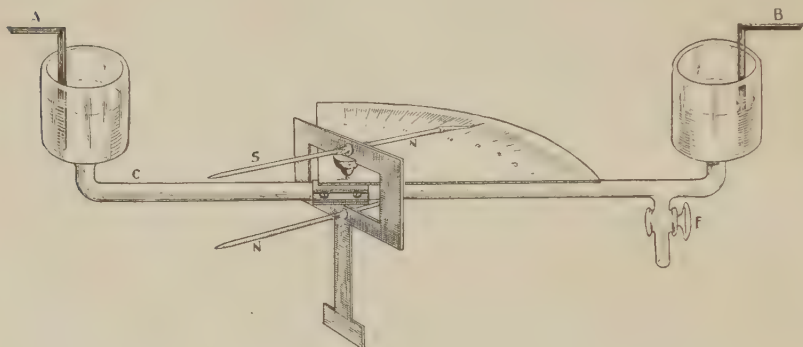
Es claro, pues, que los iones que comunican sus cargas a los electrodos, no son solamente los que desplazándose en el campo eléctrico llegan a contacto con los electrodos, sino también los que han sido abandonados por sus compañeros, de signo opuesto. Hay que suponer entonces que, al ser abandonados, son captados inmediatamente por los electrodos, lo que podría atribuirse al hecho de que la acumulación de iones del mismo signo, crea un campo eléctrico intenso en la proximidad inmediata del electrodo de opuesto signo.

La representación gráfica, y las explicaciones basadas en la misma, parecen algo artificiosas, pero se justifican, si el número de electrones que atraviesan una sección del circuito metálico debe ser igual a la suma de las cargas positivas y negativas correspondientes a cada valencia de los iones que atraviesan en los dos sentidos una sección del electrolito.

¿Pero existe realmente tal igualdad? La pregunta puede parecer absurda, puesto que equivale a dudar de la igualdad de la intensidad de la corriente en el conductor metálico y en el electrolito intercambiados en el mismo circuito. Pero se concibe que no lo sea tanto, si se piensa que la intensidad de la corriente en un electrolito ha sido medida siempre en la parte metálica del circuito, que comprende

también la bobina del galvanómetro. Por este motivo me ha parecido interesante, como confirmación de las teorías, comparar el campo magnético engendrado por el pasaje de una corriente en un electrolito con el campo que la misma produce al recorrer un circuito metálico.

El aparato empleado es muy sencillo:



La corriente pasa entre los electrodos *A* y *B* colocados en dos recipientes de vidrio unidos por un tubo horizontal, en proximidad del cual gira un delicado sistema astático *N S* cuyas desviaciones son indicadas en el cuadrante *D*, dividido en grados. La parte central del aparato que contiene las agujas y el cuadrante, está encerrada en una caja con tapa de vidrio, para evitar el efecto perturbador de las corrientes de aire. Para evitar cualquier cambio en las condiciones de la experiencia, después de efectuadas las observaciones con el electrolito y haber vaciado esto por el tubo *F* provisto de llave, lo sustituía con mercurio, observando la desviación de la aguja y regulando, mediante un reóstato, la corriente, hasta que su intensidad, indicada por un galvanómetro, fuera idéntica a la anterior.

El campo magnético producido por una carga en movimiento en un punto del espacio es normal al plano que pasa por dicho punto y por la posición de la carga en el instante considerado, conteniendo la dirección de la velocidad, y su intensidad está dada por la fórmula:

$$H = \frac{e v \sin \alpha}{d^2}$$

Siendo *e* la carga, *v* la velocidad, *d* la distancia y α el ángulo formado por la velocidad y la recta que une la carga, supuesta punti-

forme, con el punto considerado. En el caso de un ángulo de 90 grados la fórmula se simplifica:

$$H = \frac{e v}{d^2}$$

Los iones del electrolito y los electrones del metal, cualquiera que sea la relación entre sus velocidades, deben engendrar un campo magnético de igual intensidad, si el número de iones y de electrones libres que atraviesan una sección de los conductores de las dos especies es el mismo. En efecto, el número de cargas que atraviesan la sección de un conductor en la unidad de tiempo es igual al producto nv del número de cargas contenidas en la unidad de longitud del mismo conductor por su velocidad o, más exactamente, por la componente de su velocidad en la dirección de la fuerza eléctrica.

En el caso de los electrolitos, los iones de signo opuesto, moviéndose en sentido contrario, engendran un campo en el mismo sentido puesto que en las fórmulas precedentes, al invertirse el signo de e , se invierte también el de v . Como, por otro lado, los aniones y los cationes se mueven, en general, con distinta velocidad tendremos:

$$n v_1 + n v_2 = n_1 v_3$$

siendo v_1 , v_2 , y v_3 respectivamente, las velocidades de los aniones, de los cationes y de los electrones libres del metal.

De la fórmula precedente deducimos:

$$n(v_1 + v_2) = n_1 v_3 \quad \text{y haciendo} \quad v_1 + v_2 = V$$

tenemos: $\frac{V}{v_3} = \frac{n_1}{n}$ o sea las velocidades son inversamente proporcionales al número de cargas contenidas en la unidad de longitud de los dos conductores.

En todos los experimentos efectuados con distintos electrolitos, los campos magnéticos resultaron idénticos a los del metal, lo que no solamente prueba que el número de electrones que atraviesan una sección del conductor metálico es igual a la suma de las cargas de los dos signos que en el mismo intervalo de tiempo atraviesan una sección del conductor electrolítico, sino que, a pesar de que el pasaje de la corriente en un electrolito es un fenómeno esencialmente distinto del pasaje de la corriente en un metal, da un significado más

preciso a la afirmación de que la intensidad es la misma, cuando los dos conductores están intercalados en el mismo circuito.

Esto me parece importante, puesto que el hecho de que la ley de Ohm sea aplicable a un circuito del cual forman parte metales y electrolitos, no expresa, en realidad, según mi opinión, ninguna relación cantitativa con respecto a la corriente que recorre una y otra especie de conductores, sino significa tan sólo que en la totalidad o en una parte cualquiera del circuito, la relación entre la fuerza electromotriz y la intensidad —medida ésta con el método común, o sea con un galvanómetro externo al electrolito— es una constante.

Algo análogo, creo, puede afirmarse con respecto a la aplicabilidad de la ley de Joule, o sea que tal constante resulta tal que la ley debe necesariamente cumplirse independientemente de cualquier relación cuantitativa real en los fenómenos de conducción en los dos medios.

BIBLIOGRAFIA

- CHWOLSON. *Traité de Physique*. Tome quatrième. 1910.
CASTELFRANCHI, *Fisica Moderna*. 1931.
HAISSINSKY. *L'atomistica Moderna y la Chimica*. 1930.
JONES. *Trattato di Chimica Fisica*. 2da. ediz. italiana. 1923.
MC. C. LEWIS. *Traité de Chimie Physique*. Tome 1.
A. HOLLARD. *La Theorie des Ions et l'Électrolyse*. 1912.

HOMENAJE AL INGENIERO LUIS A. HUERGO

El 4 de Noviembre de 1937 tuvo lugar en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, un solemne acto de homenaje al ingeniero Don Luis A. Huergo, con motivo de cumplirse en esa fecha el centenario de su nacimiento. En dicha ocasión, el ingeniero Don Enrique Chanourdie pronunció el discurso que sigue, hablando en nombre de la Sociedad Científica Argentina.

Señores:

La Sociedad Científica Argentina me ha conferido el alto honor de representarla en este acto consagrado a conmemorar la vida del ingeniero Luis Augusto Huergo, la personalidad más descolante de aquel grupo selecto de preclaros varones que diéronle fama y prestigio desde los primeros tiempos de su iniciación, en que no sólo llenó su alta misión de promover el primer movimiento trascendente producido en el país en pro del fomento de los estudios científicos, sino que fué el alma parens de cuya entraña espiritual han surgido no pocas de las ya numerosas instituciones que han ido constituyéndose entre nosotros a medida que iban imponiendo las especializaciones, consecuencia de la evolución y progresos alcanzados por diversas ramas de la ciencia humana.

No sólo fué, el ingeniero Huergo, su primer Presidente, y principal animador de aquellos jóvenes ingenieros y estudiantes de esta casa que tuvieron la patriótica inspiración de echar las bases de una asociación llamada a «promover empeñosamente el adelanto de la ciencia, procurando así honor y gloria para el país» según se expresaba en el prospecto preliminar redactado por Estanislao S. Zeballos; su acción en ella ha sido intensa y constante durante las cuatro décadas transcurridas desde su primera elección, en 1872, hasta los últimos días de su vida. Los neófitos que, deseosos de instruirnos sobre los grandes problemas constructivos que se dilucidaban en la década del 80, nos iniciamos concurriendo en carácter de humildes oyentes a sus memorables conferencias sobre el puerto de la Capital; o los que, años después, asistimos a las sonadas controversias sobre el canal del Norte, podemos dar fe de lo primero. Y todos cuantos han participado en los diversos congresos celebrados bajo los auspicios de la Sociedad, hasta inclusive el «Congreso Científico Internacional Americano» celebrado en 1910, en ocasión del Centenario, cuyo éxito se debió principalmente a la acción de Huergo, su dinámico Presidente, desarrollada tres años escasos antes de su muerte, pueden dar fe de esa constancia.

Era, pues, imperiosa la participación de la Sociedad Científica Argentina en este acto celebrado en honor de quien fuera una de las más firmes columnas de su edificio espiritual. Ello, aparte de figurar aún, entre sus asociados, quienes tuvieron con él vinculación profesional, de docencia o, simplemente, lazos de amistad y, consecuentemente, una sincera admiración que les ha permitido contribuir a mantener y difundir su respetada memoria entre la nueva generación.

La actual Junta Directiva de la Sociedad, que preside el ingeniero Dobranich, Decano, a la vez, de esta Facultad, ha considerado ser de rigor recurrir a ese núcleo de veteranos para designar a quien debía representarla en este acto, porque ha primado, sin duda, en ella, el propósito de acentuar su significación con una nota en que predominase el sentimiento, contribuyendo en tal forma a poner a tono los rasgos salientes de la personalidad de Huergo que le valieron el aprecio de cuantos tuvieron oportunidad de aquilatar sus grandes merecimientos: Por una parte, su obra de técnico eminente —a la que debían referirse hoy delegados de otras instituciones— y, por otra, su hombría de bien que pocos de sus sobrevivientes tuvieron la fortuna de valorarla como quien tiene el honor de dirigiros la palabra, pues quiso mi buena estrella depararme la suerte de vincularme a quien fuera un singular exponente de sólidas virtudes aleccionadoras, entre las que descollaba un profundo sentimiento altruista, arraigado en un gran corazón.

Porque, no obstante el ceño adusto que acusa su iconografía, que lo recuerda en general con una probidad artística facilitada por un físico expresivo y fotogénico; malgrado su faz hirsuta que imponía a quienes no tenían el privilegio de tratarlo sino accidentalmente, Huergo era un hombre bueno en toda la extensión de la palabra. Son múltiples los rasgos de su vida que lo comprueban. Pueden dar fe de ello, entre otros, quienes concurrían a esta casa de estudios durante sus decanatos, siéndoles dado constatar el respetuoso afecto con que se le rodeaba, sentimiento que no era fruto de debilidades en el cumplimiento de sus deberes, sino la consecuencia de un equilibrado sentido de esa humana justicia que conoce el ritmo verdadero al cual deben someterse los dictados de la propia conciencia. Consecuencia de su bondad: era generoso, desprendido. Algunos le tachaban de pródigo. Esta tacha no le quitó el sueño; pero aprovechó la circunstancia de la publicación de un tratado de aritmética para presentar en él ciertos concretos de «amarretismo»... Lo cierto es que era proverbial su desinterés. Citaré tan solo uno de los casos de mi conocimiento, que pone, además, de manifiesto, su acrisolada honradez. Cuando Huergo resolvió reconstruir su casa de la calle México, celebró un contrato a ajuste alzado. Recibida la obra, tuvo conocimiento de que el constructor se lamentaba de una pérdida sufrida. Dado el tenor y el espíritu del contrato, no cabía reclamo alguno; pero Huergo no aceptó esta situación; y, aunque no era caso de «más vale un mal ajuste que un buen pleito», temeroso de «no poder dormir en su propia casa si supiera que su construcción había causado la quiebra del constructor», procedió en consecuencia.

La modestia era otra de sus características. La vehemencia con que solía sostener sus opiniones en determinadas circunstancias, no enerva esta aserción; esa vehemencia, puramente accidental, era consecuencia de una reacción que la

eserupulosidad en reunir sus elementos de juicio provocaba en su espíritu, en la creencia que pudiera no mediar igual eserupulosidad en el contrario. Este estado de ánimo se puso de manifiesto particularmente durante los debates a quo diera lugar el canal de Junín al Baradero. En esa oportunidad tratóse de convencerlo de que su técnica era vulnerable ante la de una escuela más moderna; pero sus contrincantes debieron reconocer que su gran sentido común le permitía hasta suplir cierta falta de información que aquéllos poseían abundante, y cuya refutación parecía temeraria; no obstante lo cual, valiéndose Huergo de esa propia documentación de los sostenedores del canal, insistió en que no habría agua suficiente para alimentarlo. ¡Y pocos meses después del sonado debate, se suspendían las obras por haberse comprobado definitivamente que solo la Divina Providencia podría asegurar la provisión del líquido elemento! Con razón solía decirles Huergo a los colegas con harta frecuencia: No pido la opinión del técnico, sino la de su «buen sentido común».

Huergo reunía otra condición que no se prodigaba en sus tiempos ni en los presentes: era un hombre de carácter. Lo comprobó en múltiples circunstancias, particularmente al renunciar su cargo de ingeniero-director de las obras del Riachuelo, que había obtenido por concurso y en base a un contrato que le aseguraba una posición entonces envidiable. Lo comprobó en el desempeño del cargo de Intendente de Guerra, en circunstancias difíciles por demás, en las que debió prescindir de paños tibios, sobre todo en sus relaciones con sus superiores. Esa condición, que facilita a los moralmente solventes el afrontar responsabilidades en situaciones de apremio, permitióle aconsejar la elevación del tan discutido y temido Dique San Roque y duplicar su capacidad de embalse, solución que basta por sí sola para acreditar a su autor como técnico consumado y consagrado experto en política económica.

Antes de terminar esta semblanza moral del ingeniero Luis A. Huergo, hecha de recuerdos personales, séame permitido referirme al último gran esfuerzo con que coronó la obra de su fecunda existencia, esfuerzo agotador de su espíritu y de su cuerpo.

En circunstancias en que la Nación entera preparábase a conmemorar el histórico Centenario, Huergo debió aceptar una de las presidencias de la Junta Ejecutiva organizadora de la Exposición Industrial que debía constituir uno de los números principales de los festejos. A mi vez, fui designado Comisario General de ese certamen, siendo mi primer empeño el obtener de Huergo aceptase también la presidencia de la Comisión de construcciones. Tuve así, una vez más, la gran satisfacción de colaborar con él en una obra de interés público. Y, aunando nuestras voluntades y la del malogrado Luis Babiene, Presidente de la Junta, pudimos hacer obra eficaz, de la que deseo destacar la propaganda activa que hicimos a favor de la entonces incipiente industria del petróleo, producto que la División de Minas, Geología e Hidrología acababa de descubrir, el 13 de Noviembre de 1907, a la profundidad de 535 metros, en Comodoro Rivadavia, al practicarse una perforación en busca de agua potable de la cual carecía esa población. Con un crédito especial que no fué fácil obtener, y a costa de no pocas noches de insomnio debidas a la natural preocupación por la responsabilidad que se me atribuía por quienes alegaban los peligros de la instalación, pudimos presentar una muestra interesante del

petróleo argentino, hacer funcionar un motor Diesel durante toda la duración de la Exposición y despertar un legítimo interés entre gobernantes y público. Pero, más que al interés así despertado, cabe darle mayor importancia a aquella iniciativa por la influencia que el proceso de esa instalación tuvo en el espíritu animoso de Huergo cuya fibra patriótica decidiólo a emplear sus últimas energías al servicio de la gran causa del petróleo nacional, causa a la cual se consagró por entero hasta los últimos momentos de su vida, con los resultados que todos conocemos.

Tal fué, señores, perfilada a grandes rasgos, la existencia de este técnico eminente, de este gran ciudadano cuya memoria contribuye a honrar reverentemente la Sociedad Científica Argentina, en este acto justiciero consagratorio de su descollante personalidad.

REGLAMENTO PARA LAS PUBLICACIONES DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS EN LOS "ANALES"

La Junta Directiva de la Sociedad Científica Argentina en su sesión del nueve de diciembre de mil novecientos treinta y siete ha aprobado y declara en vigencia a partir de la fecha, la reglamentación siguiente:

1º El Director de los *Anales* elevará a la Junta Directiva, cuando a su juicio corresponda, los trabajos que le sean remitidos para su publicación. La Junta resolverá de por sí o previo dictamen de los asesores que en cada caso designe y en forma inapelable sobre la conveniencia u oportunidad de la respectiva publicación y en todo caso, con recomendación de las modificaciones u observaciones que sea prudente introducir.

2º Las tiradas aparte cualquiera que sea su número correspondientes a artículos publicados en los *Anales* llevarán inscripto en la carátula la constancia de su publicación en esta revista, tomo año y conservará el encabezamiento y la compaginación que le correspondía en el texto general.

3º No se publicará ningún trabajo cuyo extensión sea mayor de treinta y dos páginas impresas, incluyendo grabados y cuadros. No se publicarán en cada semestre más de tres trabajos de un mismo autor o de éste en colaboración con otro, cualquiera que sea su extensión; ni más de cuarenta y ocho páginas impresas en dos o tres artículos.

4º No se publicarán trabajos en idioma extranjero, salvo aquellos remitidos por socios correspondientes de la Sociedad y los que a juicio de la Junta sean de particular interés.

5º No se reproducirán trabajos ya publicados en revistas del país o en cualquiera otro de idioma castellano. A los efectos de esta disposición, los autores declararán por escrito al presentar el trabajo, en este sentido.

6º En el orden de publicación de los trabajos se dará preferencia a aquellos cuyos autores sean socios de la Sociedad, sin perjuicio de que en casos particulares la Junta pueda resolver en contrario.

BIBLIOGRAFIA

OMBREDANNE, ANDRÉ, *Le problème des aptitudes a l'age scolaire*. Paris. Hermann et Cie. éditeurs. 6, Rue de la Sorbonne, 6, 1936; 58 páginas.

Se trata de un folleto de investigación realizada como experiencia sobre un grupo de escolares. Comprende un análisis de este gran problema de actualidad, la selección escolar; estudia el problema de las aptitudes y el escolar ante el problema de las aptitudes. Las experiencias fueron realizadas entre enero y julio de 1935, de modo que no puede ser más reciente el trabajo ni mejor informado. El autor conoce, visiblemente, toda la bibliografía contemporánea de la pedagogía infantil y de la didáctica general.

La experimentación se efectuó sobre 21 escolares de enseñanza secundaria en los cursos superiores de ella.

La cuestión planteada es la de la selección del alumnado que ha de pasar de los estudios primarios a los secundarios, a lo que se atendía ya con una cierta severidad en los exámenes de 5º para 6º primarios.

Este trabajo responde a la preocupación que se ha despertado en Francia desde hace algunos lustros y que ha tenido como directores a Kaczynska, Piéron, Langier, Weinberg, Toulouse, Dietz, continuadores de Binet en su famoso trabajo "Las idées modernes sur le enfants".

Determinar una aptitud para un esfuerzo, es simple cuando el esfuerzo puede ser realizado de inmediato, pues basta entonces realizar el esfuerzo y conocer el resultado. Pero si el esfuerzo para ser realizado requiere un adiestramiento prolongado es preciso descubrir la aptitud antes de iniciar este adiestramiento.

Este opúsculo precede al de "Les inadaptés scolaires" del mismo Ombredanne, Suares y Canivet, en donde se sigue la investigación en cada uno de los 21 niños elegidos y se los examina a la luz de las leyes modernas de la psicotécnica.

Se comprueba un descenso de la inteligencia en los niños de 12 y 13 años y en los niños de 14 años; y en el trabajo escolar un descenso visible entre los 10 y 11 años de las niñas y entre 12 y 13 de los varones. Se restablece el trabajo escolar satisfactorio a los 12 años de las niñas y a los 14 de los varones; esto corresponde a la aparición de la pubertad.

N. B. M.

INDICE GENERAL

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO VIGÉSIMO CUARTO

	Pág.
CARLOS WAUTERS.—La chaera experimental de Patagones. Impresiones de un observador. (<i>Conclusión</i>)	9
MAURICIO DURRIEU.—Cotejos económicos y selección económica. (<i>Continuación</i>)	23
E. A. DE CESARE.—Relaciones de carácter ordinal en las formas fundamentales de 1ª especie	33
ALEJANDRO VON DER BECKE.—Profesor Dr. Hans Spemann. Premio Nobel 1935. Biografía y breve reseña de su obra	52
A. E. SAGASTUME BERRA.—Fundamentos matemáticos de la música (<i>Conclusión</i>)	65, 286 y 400
E. A. DE CÉSARE.—Subordinación de la métrica no-Euclídea a la Geometría Proyectiva	82
OTTO GOTTSCHALK.—Reglamentos para estructuras de hormigón armado	105
GUILLERMO SCHULZ.—Posibles variaciones de la superficie del geoide y sus influencias sobre la nivelación de precisión	117
LUIS A. SOLORZANO.—Eliminación de la diferencia de potencial de solución a solución en las pilas de concentración, sin emplear electrolitos como medio de unión	123
FRANCISCO LA MENZA.—Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos (<i>Continuación</i>)	157 y 248
FERNANDO L. GASPAR.—La ortogonalidad sin ponderación. El problema de Hermitte	176
C. M. ALBIZZATI.—La presencia del glutatión en el germen de trigo y su influencia en las harinas	194
C. M. ALBIZZATI.—Notas sobre el empleo de la harina de malta como «mejorador biológico» en la harina de trigo	203
EMILIO M. DÍZ.—Sobre los efectos de la radiación solar en la estratosfera	270
E. NATALE.—La curva logística representativa del desarrollo numérico de la población humana	275
CARLOS WAUTERS.—Las aguas subterráneas en nuestra legislación civil. (<i>Conclusión</i>)	323 y 383
C. C. DASSEN.—Roberto Montessus de Ballore. (1870-1937)	355
VIRGILIO TEDESCHI.—Las teorías sobre conductibilidad electrolítica y métrica y el campo magnético producido por las cargas en movimientos	427
SECCION SANTA FE de la Sociedad Científica Argentina:	
Asamblea del 16 del 16 de Abril de 1937	1
Informe de la Presidencia	2
Sesión de comunicaciones del 15 de Junio de 1937	209
JOSÉ BABINI.—Sobre un problema de Descartes	209

	Pág.
GUILLERMO BERRAZ. — Microanálisis elemental orgánico por gasometría.	
Determinación simultánea del N, C e H	209
C. CHRISTEN Y G. BERRAZ. — Representación convencional de los aparatos y materiales de laboratorio	210
G. A. FESTER, J. CRUELLAS Y F. GARGATAGLI. — La « Magallanita », un nuevo mineral bituminoso	211
<i>Ciclo de conferencias</i> : La migración de los símbolos, por DUNCAN L. WAGNER	212
<i>Sesión de comunicaciones</i> del 13 de Agosto de 1937	223
DÁMASO LACHAGA. — Las grietas en los suelos de Santiago del Estero	223
HORACIO DAMIANOVICH. — La ley de producción del helio por el radio.	
Resultados obtenidos hasta el presente y nuevas experiencias . .	229
H. DAMIANOVICH Y J. PIAZZA. — La química del helio y elementos análogos. Descomposición térmica de los compuestos helio-platino a altas presiones en atmósferas de helio	234
HORACIO DAMIANOVICH Y FRANCISCO URONDO. — Helio y radioactividad en los minerales de radio. I. Autonita y sus fracciones	240
JOSÉ PIAZZA. — Nuevo motor térmico	247
<i>Ciclo de conferencias</i> . — Conferencias de los Dres. CRISTOFREDO JAKOB Y GUSTAVO A. FESTER	377
Necesidad de fiscalizar las reservas acuáticas en la República Argentina, por el Dr. CRISTOFREDO JAKOB	377
Viaje de estudio a la zona Magallánica y Tierra del Fuego, por el Dr. GUSTAVO A. FESTER	378
<i>Sesión de comunicaciones del 10 de Diciembre de 1937</i>	379
GREGORIO KLEER. — Sobre la naturaleza de las rocas de la Cantera Aguirre de las sierras del Tandil y su diferenciación	379
JOSÉ BABINI. — Sobre algunas propiedades de las derivadas y primitivas de los polinomios de Legendre	381
G. A. FESTER. — La Geoquímica del Vanadio	381

VARIAS

Homenaje a MARCONI. (Suplemento a la entrega de Septiembre). Marconi en los orígenes y en la evolución de las Transmisiones inalámbricas	6
Homenaje a EDUARDO L. HOLMBERG:	
Nota necrológica	369
Discurso del Sr. Presidente de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Ing. AGUSTÍN MERCAU	373
Discurso del Sr. Prof. ALBERTO CASTELLANOS	374
Artículos del Dr. E. L. HOLMBERG, publicados en los « Anales » . . .	376
Homenaje al Ing. LUIS A. HUERGO	441
Sociedad Científica Argentina. — Reglamento para las publicaciones de artículos científicos en los « Anales »	445

BIBLIOGRAFÍA

C. C. D.	279
E. R.	128 y 366
N. B. M.	446

